

H. Holm

1971

COULOMBSPALTUNG

I N A U G U R A L - D I S S E R T A T I O N

ZUR

ERLANGUNG DES DOKTORGRADES

DER

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

JOHANN-WOLFGANG-GOETHE-UNIVERSITÄT

ZU

FRANKFURT AM MAIN

VORGELEGT VON

HARTMUT HOLM

AUS

BAD HOMBURG V. D. H.

FRANKFURT A. M., 1971

UNIVERSITY OF LEIDEN

1811-1812

1811

1811-1812

1811

1811-1812

1811

1811-1812

1811

1811-1812



1811-1812

1811-1812

1811

1811-1812

1811-1812

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Frankfurt am Main.

Dekan: Prof. Dr. H. Oelschläger

Erster Berichterstatter: Prof. Dr. W. Greiner

Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr. D. Drechsel

Tag der mündlichen Prüfung: 25.8.71

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Einführung	1
II. Klassische Theorie der Coulombspaltung	
II.1 Konstruktion der Hamiltonfunktion	5
II.2 Bestimmung der Kernkraft	9
II.3 Berechnung der Coulombschwelle	10
II.4 Rotations-Vibrations-Potential	12
II.5 Potentialenergiefläche	25
III. Quantenmechanische Theorie der Coulombspaltung	
III.1 Einführung in die Theorie der Coulomb- anregung	31
III.2 Erweiterung auf Coulombspaltung	33
IV. Ausblick	42
Literaturverzeichnis	44

1. Einführung

Schießt man schwere Ionen aufeinander, so werden Vibrationen, Riesenresonanzen und Rotationen angeregt (s. Fig. 1). Wenn die Energie des Projektils niedriger als die Coulombschwelle liegt und der Targetkern sich infolge der hohen induzierten Anregungsenergie spaltet, so bezeichnen wir dies als Coulomb-spaltung. Den Begriff der Coulombschwelle und den Spaltvorgang werden wir noch präzisieren. Coulombspaltung ist zu erwarten für Projektile mit $A \geq 100$ und Aktiniden als Targetkernen. Diese durch das Coulombfeld induzierte Kernspaltung ist ein neuer Reaktionsmechanismus. Bis 1967 wurde nur spontane oder durch Teilchen induzierte Spaltung theoretisch und experimentell untersucht. Die niedrigste Energie, für die sich die Oberflächen von Projektil und Targetkern berühren, definieren wir als Coulombschwelle. Ihre genaue Untersuchung ist ebenfalls ein neues Arbeitsgebiet, das mit dem Bau der Schwerionenbeschleuniger erheblich an Bedeutung gewonnen hat. Ein anschauliches, wenn auch stark vereinfachtes Bild vom zeitlichen Verlauf der Coulombspaltung vermittelt Fig. 2. Ein ^{130}Xe -Kern nähert sich dem ^{238}U -Targetkern. Dieser beginnt zu rotieren und sich zu deformieren. Wenn der Xe-Kern zurückfliegt, hat der U-Kern die Spaltbarriere überwunden und sich bereits eingeschnürt. Während sich mit dem Problem der Coulombschwelle zahlreiche Arbeiten befassen¹⁻⁶, gibt es bis heute nur wenig Literatur über Coulombspaltung⁶⁻⁹. Dazu kommt, daß die ersten vorausgesagten, klassisch berechneten Wirkungsquerschnitte⁷ etwa einen Faktor 100 größer sind als die entsprechenden quantenmechanischen^{6,8,9}. Der physikalisch neue Effekt, der hier untersucht wird, ist der Einfluß der kurzreichweitigen Kernkräfte auf die Coulombspaltung. Sie

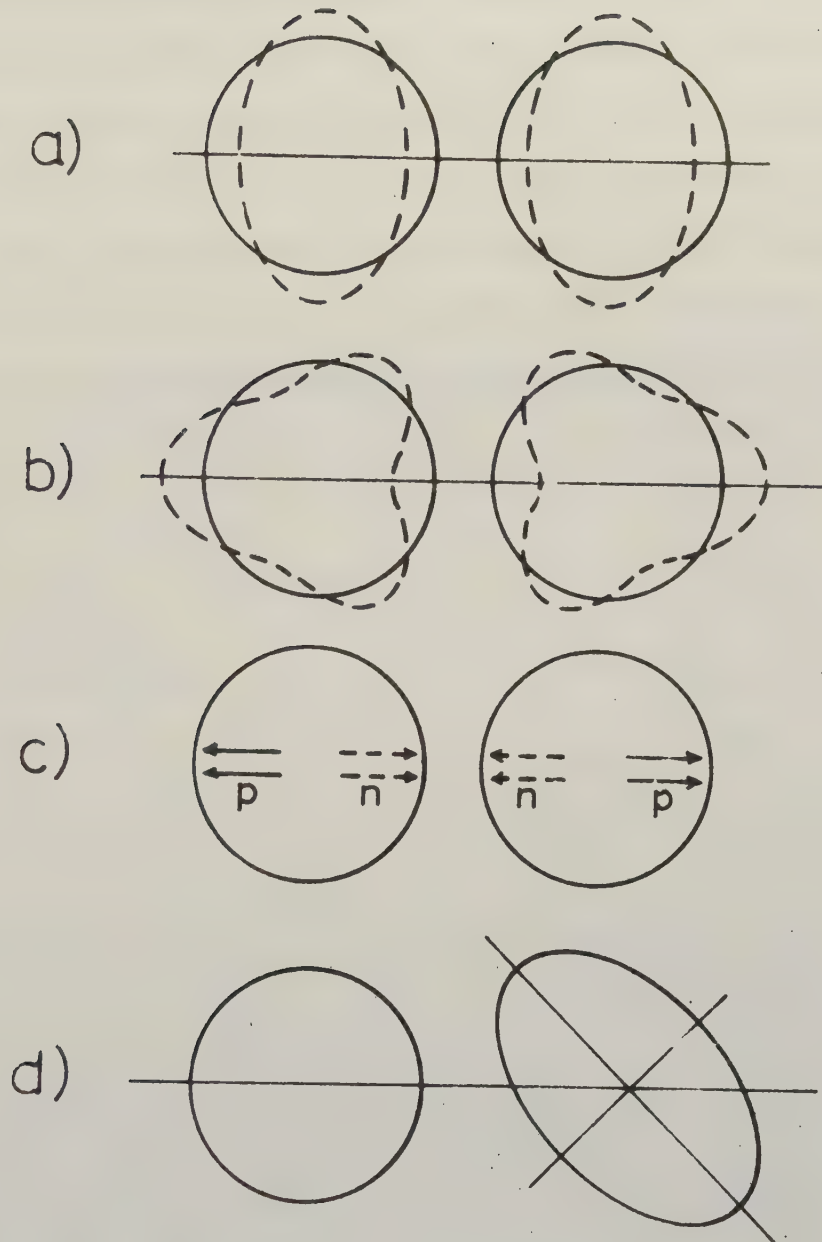


Fig. 1 a) Induzierte Quadrupolvibration
b) Induzierte Oktopolvibration
c) Induzierte Riesenresonanz
d) Induzierte Rotation

wirken der Coulombkraft entgegen und verringern so die Coulombbarriere^{4,5}. Entsprechend ist zu erwarten, daß nahe der Coulombschwelle die durch die Kernkräfte stark verringerte Anregungsenergie des Targetkerns ein Absinken des Wirkungsquerschnitts für Coulombspaltung zur Folge hat. Die Kernkräfte werden in einem verfeinerten klassischen Modell behandelt, das einfacher und anschaulicher als eine quantenmechanische Rechnung ist. Dazu stellen wir die Hamiltonfunktion des Systems auf und lösen numerisch die Hamiltonschen Gleichungen. Um die Anwendung des klassischen Modells zu rechtfertigen, wurde auch

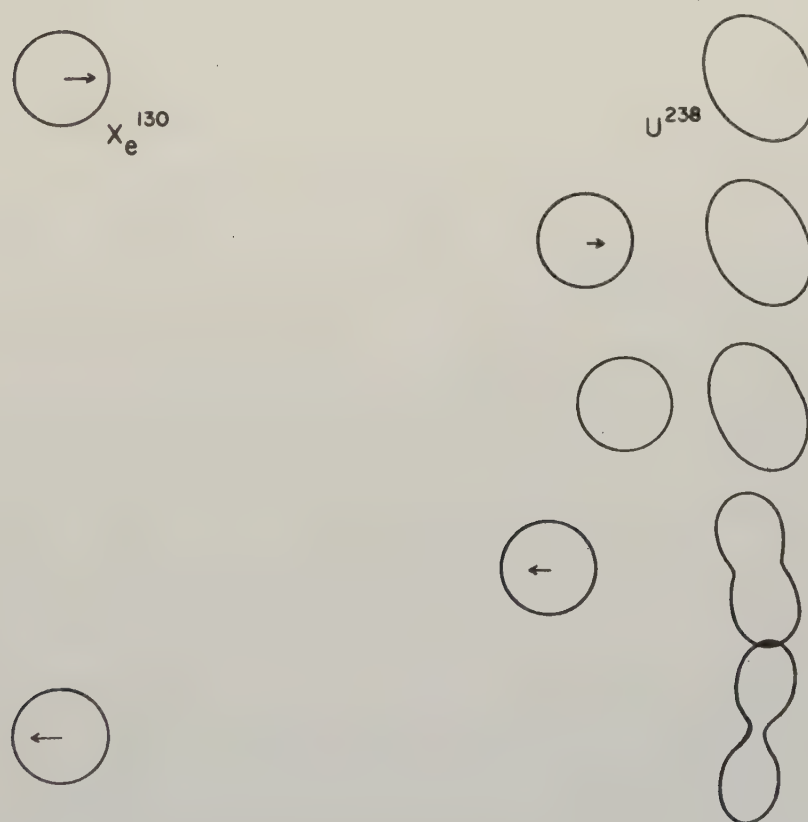


Fig. 2: Anschauliche Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Coulombspaltung.

die quantenmechanische Methode stark verbessert und gezeigt, daß die Diskrepanz zwischen den bisherigen Arbeiten nicht prinzipiell, sondern modellbedingt ist. Experimentelle Ergebnisse zur Coulombspaltung liegen noch nicht vor. Sie werden Aufschluß geben über die Qualität der kollektiven Kernmodelle bei hohen Anregungsenergien und ein genaueres Studium der Potentialenergiefläche ermöglichen. Sie spielt die zentrale Rolle für alle kollektiven Kernreaktionen. Mit Hilfe der Coulombspaltung wird man Aussagen über die Potentialenergiefläche im Bereich großer Deformationen erhalten, die für das allgemeine Verständnis der Kernspaltung besonders wichtig sind.

II. Klassische Theorie der Coulombspaltung

II.1 Konstruktion der Hamiltonfunktion

Zur quantitativen Beschreibung der Coulombspaltung wurde das in Ref. 10 entwickelte dynamische Modell weiter verfeinert. Als Projektile wird man in nächster Zukunft hauptsächlich schwere Edelgase verwenden. Dafür sprechen zwei Vorteile: Einmal lassen sich ihre Ionen am einfachsten erzeugen, zum anderen verursachen sie als Nichtmetalle im Beschleuniger keine unerwünschten Kurzschlüsse. Als Targetkerne kommen praktisch nur die deformierten Aktiniden in Frage, da sie Spaltschwellen in der Größenordnung von 6 MeV besitzen. Wir richten deshalb unsere Theorie auf sphärische Geschoskern und deformierte Targetkerne aus. Weiter beschränken wir uns auf Rückwärtsstreuung, da hier die Anregungsenergien der inneren Freiheitsgrade von Projektil₍₁₎ und Targetkern₍₂₎ maximal werden. Die Riesenresonanzen können vernachlässigt werden, da ihr Einfluß sehr gering ist^{5,10}. Die Geschwindigkeiten der Projektile liegen in der Größenordnung von 10 % der Lichtgeschwindigkeit. Die magnetische Wechselwirkung der Kerne wird deshalb ebenfalls vernachlässigt. Dann besteht die Gesamthamiltonfunktion, die das Problem vollständig beschreibt, aus folgenden Summanden

$$H = \frac{p_R^2}{2m} + H_{\text{vib}(1)} + H_{\text{vib}(2)} + H_{\text{rot}(2)} + H_{\text{rot vib}(2)} + H_{\text{Coul int}} + H_{\text{Yukawa int}} \quad (1)$$

$p_R^2/(2m)$ und $Z_1 Z_2 e^2/R$, der Monopolterm aus $H_{\text{Coul int}}$ (s. Gl. (15)), beschreiben die Bahnbewegung, m ist die reduzierte Masse, p_R der Relativimpuls. Zur Erklärung der übrigen Summanden müssen wir zuerst die kollektiven Vibrationsvariablen einführen. Sie sind definiert durch die Entwicklung der

Kernoberfläche nach Kugelfunktionen

$$R(\vartheta, \varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}^*(\vartheta, \varphi) \right) \quad (2)$$

mit $R_0 = r_0 A^{1/3}$. Dabei beschränken wir uns auf Quadrupol-vibrationen, da sie den eigentlichen Spaltungsfreiheitsgrad beschreiben. Aus der Volumenerhaltung¹¹ folgt

$$\alpha_{00} = - \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sum_{\mu} |\alpha_{2\mu}|^2. \quad (3)$$

Die Bedingung der Schwerpunktserhaltung ist mit $\alpha_{1\mu} = 0$ automatisch erfüllt. In der harmonischen Näherung ist $H_{\text{vib}}(1)$ dann gegeben durch

$$H_{\text{vib}}(1) = 1/2 \sum_{\mu} (1/B_{2(1)} |\pi_{2\mu}|^2 + C_{2(1)} |\alpha_{2\mu}|^2). \quad (4)$$

Die Konstanten $B_{2(1)}$ und $C_{2(1)}$ sind für viele Kerne in Ref. 12 zusammengestellt. Für deformierte Kerne transformieren wir die $\alpha_{2\mu}$ vom Laborsystem in das kernfeste Koordinatensystem

$$a_{\nu} = \sum_{\mu} \alpha_{2\mu} D_{\mu\nu}^2(\alpha, \beta, \gamma). \quad (5)$$

Hierbei bezeichnen α, β, γ die Euler-Winkel und die $D_{\mu\nu}^2$ die Rotationsmatrizen. Sie sind gegeben durch¹³

$$D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-im'\alpha} e^{-im\gamma} \sum_s \frac{(-1)^s [(j+m)! (j-m)! (j+m')! (j-m')!]^{1/2}}{s! (j-s-m')! (j+m-s)! (m'+s-m)!} \cdot [\cos \frac{\beta}{2}]^{2j+m-m'-2s} [-\sin \frac{\beta}{2}]^{m'-m+2s} \quad (6)$$

und genügen den Beziehungen

$$D_{m'm}^{j*}(\alpha, \beta, \gamma) = (-1)^{m'-m} D_{-m', -m}^j(\alpha, \beta, \gamma) \quad (7)$$

und
$$D_{m'm}^{j*}(\alpha, \beta, \gamma) = D_{m', m}^j(-\gamma, -\beta, -\alpha). \quad (8)$$

Aus der Bedingung, daß die Hauptachsen des kernfesten Systems mit den Hauptträgheitsachsen des Kerns zusammenfallen sollen, folgt $a_1 = a_{-1} = 0$ und $a_2 = a_{-2}$. Dann ist, wenn wir mit L_y die Drehimpulse und J_y die Trägheitsmomente bezeichnen,

$$H_{\text{rot}}(2) + H_{\text{vib}}(2) + H_{\text{vibrot}}(2) = \sum_{\nu=1}^3 \frac{L_{\nu}^2}{2J_{\nu}(a_0, a_2)} + \frac{1}{2B} (p_{a_0}^2 + 1/2 p_{a_2}^2) + V(a_0, a_2) \quad (9)$$

mit $J_{1,2} = B(2a_2^2 \pm \sqrt{6} 2a_2 a_0 + 3a_0^2)$, $J_3 = 8 B a_2^2$. (10)

Die Trägheitsmomente enthalten die Rotations-Vibrations-

Wechselwirkung. Sie koppeln außerdem, zusammen mit dem Potential $V(a_0, a_2)$, die a_0 - mit der a_2 -Schwingung.

Berechnen wir nun $H_{\text{Coul int}}^{R_1(\vartheta_1, \varphi_1) R_2(\vartheta_2, \varphi_2)}$

$$H_{\text{Coul int}} = e^2 \int_0^{R_1(\vartheta_1, \varphi_1)} d\tau_1 \rho_p(\vec{r}_1) \int_0^{R_2(\vartheta_2, \varphi_2)} d\tau_2 \rho_p(\vec{r}_2) \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|}. \quad (11)$$

Dazu verwenden wir die Entwicklung von $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|^{-1}$ nach Kugelfunktionen¹⁴

$$\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{R}|} = \sum_{l_1, l_2} \frac{(-1)^{l_2} r_1^{l_1} r_2^{l_2}}{R^{l_1+l_2+1}} \sum_{m_1, m_2} B_{l_1, l_2}^{m_1, m_2} Y_{l_1+l_2}^{-m_1-m_2}(\theta, \phi) Y_{l_1, m_1}(\vartheta_1, \varphi_1) Y_{l_2, m_2}(\vartheta_2, \varphi_2) \quad (12)$$

mit

$$B_{l_1, l_2}^{m_1, m_2} = \frac{(-1)^{m_1+m_2} (4\pi)^{3/2}}{\{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_1+2l_2+1)\}^{1/2}} \left\{ \frac{(l_1+l_2+m_1+m_2)! (l_1+l_2-m_1-m_2)!}{(l_1+m_1)! (l_1-m_1)! (l_2+m_2)! (l_2-m_2)!} \right\}^{1/2}. \quad (13)$$

Diese Entwicklung ist für $r_1 + r_2 \leq R$ absolut konvergent. Die Ladungsdichte $\rho_p(\vec{r})$ sei homogen

$$\rho_p(\vec{r}) = Z/V = Z/(\frac{4\pi}{3} R_0^3). \quad (14)$$

Da wir uns auf den zentralen Stoß beschränkt haben, ist $\Theta \mp \Phi \equiv 0$.

Bis zur zweiten Ordnung in den Laborkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned} H_{\text{Coul int}} = Z_1 Z_2 e^2 \left\{ \frac{1}{R} + \frac{R_{01}^2}{R^3} \frac{3}{5} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \alpha_{20(1)} + \frac{R_{02}^2}{R^3} \frac{3}{5} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \alpha_{20(2)} \right. \\ - \frac{R_{01}^2}{R^3} \frac{6}{7 \cdot 4\pi} [2(|\alpha_{22(1)}|^2 + |\alpha_{2-2(1)}|^2) - (|\alpha_{21(1)}|^2 + |\alpha_{2-1(1)}|^2) - 2\alpha_{20(1)}^2] \\ - \frac{R_{02}^2}{R^3} \frac{6}{7 \cdot 4\pi} [2(|\alpha_{22(2)}|^2 + |\alpha_{2-2(2)}|^2) - (|\alpha_{21(2)}|^2 + |\alpha_{2-1(2)}|^2) - 2\alpha_{20(2)}^2] \\ + \frac{R_{01}^4}{R^5} \frac{9}{14\pi} \left[\frac{1}{6} (|\alpha_{22(1)}|^2 + |\alpha_{2-2(1)}|^2) - \frac{2}{3} (|\alpha_{21(1)}|^2 + |\alpha_{2-1(1)}|^2) + \alpha_{20(1)}^2 \right] \\ + \frac{R_{02}^4}{R^5} \frac{9}{14\pi} \left[\frac{1}{6} (|\alpha_{22(2)}|^2 + |\alpha_{2-2(2)}|^2) - \frac{2}{3} (|\alpha_{21(2)}|^2 + |\alpha_{2-1(2)}|^2) + \alpha_{20(2)}^2 \right] \\ + \frac{R_{01}^2 R_{02}^2}{R^5} \frac{27}{4\pi} \left[\frac{1}{15} (\alpha_{22(1)} \alpha_{2-2(2)} + \alpha_{2-2(1)} \alpha_{22(2)}) \right. \\ \left. + \frac{4}{15} (\alpha_{21(1)} \alpha_{2-1(2)} + \alpha_{2-1(1)} \alpha_{21(2)}) + \frac{2}{15} \alpha_{20(1)} \alpha_{20(2)} \right] \left. \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

In Hinblick auf die numerische Lösung der Hamiltonschen Gleichungen transformieren wir die komplexen Variablen $\alpha_{2\mu}$ und $\pi_{2\mu}$ auf reelle Koordinaten

$$\begin{aligned} Q_{2m} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_{2-m} + (-1)^m \alpha_{2m}) \\ Q_{20} &= \alpha_{20} \\ Q_{2-m} &= \frac{i}{\sqrt{2}} (\alpha_{2-m} - (-1)^m \alpha_{2m}) \end{aligned} \quad (16)$$

und

$$\begin{aligned} p_{2m} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\pi_{2-m} + (-1)^m \pi_{2m}) \\ p_{20} &= \pi_{20} \\ p_{2-m} &= -\frac{i}{\sqrt{2}} (\pi_{2-m} - (-1)^m \pi_{2m}) \end{aligned} \quad (17)$$

Für den Targetkern müssen nach dieser Transformation noch die $Q_{2\mu}$ über die $\alpha_{2\mu}$ durch die a_γ aus Gl. (5) ersetzt werden. Dem vom Targetkern aufgenommenen Drehimpuls entspricht ein Bahndrehimpuls des Projektils. Diese Rückwirkung ist von zweiter Ordnung und wurde in Gl. (15) vernachlässigt.

Wenden wir uns nun dem letzten Summanden aus Gl. (1),

$$H_{\text{Yukawa int}} \text{ zu } H_{\text{Yukawa int}} = \frac{V_0}{4\pi} \int_0^{R_1(\vartheta_1, \varphi_1)} d\tau_1 \varrho(\vec{r}_1) \int_0^{R_2(\vartheta_2, \varphi_2)} d\tau_2 \varrho(\vec{r}_2) \frac{e^{-1|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{a}|/\mu}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{a}|} \quad (18)$$

mit der Massendichte $\varrho(\vec{r}) = A/V$. Wir behandeln $H_{\text{Yukawa int}}$ als Störung der Coulombanregung. Das Integral wird nach einer Fourier-Transformation¹⁵ bis zu Gliedern erster Ordnung in den $\alpha_{2\mu}$ ausgerechnet. Als Monopolglied ergibt sich mit $K = 1/\mu$

$$H_{\text{Yukawa int}}^{(0)} = V_0 \frac{A_1}{V_1} \frac{A_2}{V_2} 4\pi \frac{e^{-KR}}{R} \left\{ \frac{1}{K^6} \sinh KR_{01} \sinh KR_{02} - \frac{R_{02}}{K^5} \sinh KR_{01} \cosh KR_{02} - \frac{R_{01}}{K^5} \cosh KR_{01} \sinh KR_{02} + \frac{R_{01} R_{02}}{K^4} \cosh KR_{01} \cosh KR_{02} \right\}. \quad (19)$$

Die beiden Glieder erster Ordnung von $H_{\text{Yukawa int}}$ beschreiben die zusätzliche Wechselwirkung zwischen der deformierten Oberfläche des einen Kerns und dem kugelförmigen zweiten Kern.

Für den ersten Summanden gilt

$$\begin{aligned} H_{\text{Yukawa int}}^{(1)} &= \frac{9}{4\pi} \frac{V_0 A_1 A_2}{R_{01}} \alpha_{20(2)} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} e^{-KR} \left\{ -\sinh KR_{01} \sinh KR_{02} \right. \\ &\quad \left[\frac{9}{R_{01}^3 R_{02}^3 R^3 K^8} + \frac{3}{R_{01}^3 R_{02}^3 R K^6} + \frac{9}{R_{01}^2 R_{02}^3 R^2 K^7} + \frac{3}{R_{01}^2 R_{02}^3 R^2 K^6} + \frac{1}{R_{01}^2 R_{02}^3 R K^4} + \frac{3}{R_{01}^2 R_{02}^3 R^2 K^5} \right] \\ &\quad + \cosh KR_{01} \sinh KR_{02} \left[\frac{9}{R_{01} R_{02}^3 R^3 K^7} + \frac{3}{R_{01} R_{02}^3 R K^5} + \frac{9}{R_{01} R_{02}^3 R^2 K^6} + \frac{3}{R_{01} R_{02}^3 R^2 K^5} + \frac{1}{R_{01} R_{02}^3 R K^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{R_{01} R_{02}^3 R^2 K^4} \right] + \sinh KR_{01} \cosh KR_{02} \left[\frac{9}{R_{01}^3 R_{02}^3 R^3 K^7} + \frac{3}{R_{01}^3 R_{02}^3 R K^5} + \frac{9}{R_{01}^3 R_{02}^3 R^2 K^6} \right. \\ &\quad \left. - \cosh KR_{01} \cosh KR_{02} \left[\frac{9}{R_{01} R_{02}^3 R^3 K^6} + \frac{9}{R_{01} R_{02}^3 R^2 K^5} + \frac{3}{R_{01} R_{02}^3 R K^4} \right] \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

Der entsprechende Summand für das Projektil ergibt sich

durch Vertauschen von $\alpha_{20(2)}$ mit $\alpha_{20(1)}$ und R_{02} mit R_{01} .

Danach ersetzen wir wieder $\alpha_{20(2)}$ durch

$$\alpha_{20(2)} = a_2 \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \sin^2 \beta \cdot \cos 2\gamma \right) + a_0/2 (3 \cos^2 \beta - 1). \quad (21)$$

11.2 Bestimmung der Kernkraft

Zur vollständigen Bestimmung der Hamiltonfunktion müssen noch die Stärke der Yukawa-Kraft V_0 und ihre Reichweite μ berechnet werden. V_0 und μ folgen nicht wie etwa B_2 und C_2 direkt aus experimentellen Daten. Hinzu kommt, daß V_0 noch von μ abhängt. Wir legen uns deshalb von vornherein auf $\mu = 0,8 \text{ fm}$, einem Durchschnittswert der in der Literatur verwendeten Reichweiten der Yukawa-Kraft, fest. V_0 -werte aus einem Fit an Daten aus bisher durchgeführten Streuexperimenten mit leichten Projektilen werden kaum für Schwerionenreaktionen Gültigkeit haben. Zur Berechnung der Bindungsenergie eines Kerns als Funktion der Dichte ρ machen wir deshalb folgenden Ansatz¹⁵

$$E(\rho) = W_0 A + \frac{C}{2\rho_0} \int (\rho - \rho_0)^2 d\tau + \frac{V_0}{8\pi} \int \rho(\vec{r}) \frac{e^{-|\vec{r} - \vec{r}'|/\mu}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (\rho(\vec{r}') - \rho(\vec{r})) d\tau d\tau' \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{4} \right)^2 \int \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^4} d\tau d\tau' + \frac{\kappa}{\rho_0} \left(2 \frac{\bar{r}}{A} - 1 \right)^2 \int \rho^2 d\tau. \quad (22)$$

Zur Bindungsenergie des Kerns tragen bei: die Volumenenergie, die Kompressionsenergie, die Yukawa-Selbstenergie, die Coulombenergie und die Asymmetrieenergie. Da wir nur gg-Kerne betrachten, lassen wir den Paarungsenergieterm weg; Schalenkorrekturen werden vernachlässigt. Gl. (22) läßt sich mit $\rho(\vec{r}) = A/V$ vereinfachen zu

$$E(\rho) = (W_0 - C) A + \frac{C}{2} \rho_0 V + \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{R_0} + \left[\frac{C}{2} + \kappa \left(2 \frac{\bar{r}}{A} - 1 \right)^2 \right] \frac{A^2}{\rho_0 V} \\ - V_0 \frac{A^2}{V^2} \frac{R_0^2 \pi}{\kappa^2} \left[1 - \frac{1}{\kappa^2 R_0^2} + e^{-2\kappa R_0} \left(1 + \frac{1}{\kappa R_0} \right)^2 \right]. \quad (23)$$

Die Konstanten W_0 und ρ_0 , die Bindungsenergie eines Nukleons und die Gleichgewichtsdichte in unendlicher Kernmaterie, werden aus der Brueckner-Theorie^{16,17} übernommen: $W_0 = -15,85 \text{ MeV}$,

$\rho_0 = 0,2 \text{ fm}^{-3}$. Die Größenordnung von V_0 ist festgelegt, da die Yukawa-Energie das einzige Glied ist, das mit $A^{2/3}$ in die Gleichung eingeht und damit etwa der Oberflächenenergie im Tröpfchenmodell entsprechen muß. Der genaue Wert von V_0 ergibt sich aus den Nebenbedingungen

$$\frac{\partial E}{\partial R_0} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial E}{\partial Z} = 0, \quad (24)$$

d. h. die Bindungsenergie muß stabil sein in bezug auf den Radius des Kerns und seine Ladung. Aus den drei Gleichungen (23), (24) sind V_0 , die Kompressionskonstante C und die Asymmetriekonstante κ mit Hilfe der gemessenen Bindungsenergie berechenbar.

11.3 Berechnung der Coulombschwelle

Die Hamiltonfunktion ist nun komplett, und wir sind in der Lage, die 22 gekoppelten Hamiltonschen Gleichungen aufzustellen. Sie werden numerisch mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens gelöst¹⁰. Da das Streuproblem symmetrisch zur z-Achse (s. Fig. 3) ist, können wir uns auf den Euler-Winkel β beschränken. Die Coulombschwelle ist definiert als die niedrigste Energie, bei der sich die Oberflächen von Projektil und Targetkern gerade berühren. Als Anfangsbedingungen werden die Gleichgewichtsgestalten der beiden Kerne, die Anfangsorientierung des Targetkerns und ein Abstand R von 150 fm vorgegeben. Als Lösung der Hamiltonschen Gleichungen erhält man zu jedem Zeitpunkt t den genauen Wert der Vibrationsvariablen, des Winkels β und der zugehörigen Impulse. Damit ist die Kerngestalt von Projektil und Targetkern und auch dessen Orientierung bekannt. Die Coulombschwelle ergibt sich nun aus simplen geometrischen Überlegungen. Man gibt sich einen Hilfswinkel δ vor und berechnet im Laborsystem die Strecke $\overline{OA}$ (s. Fig. 3)

$$\overline{OA} = R_{02} \left(1 + \sum_{\mu} (-1)^{\mu} Q_{2-\mu}(Z) \phi_{2\mu}(\delta, 0) \right). \quad (25)$$

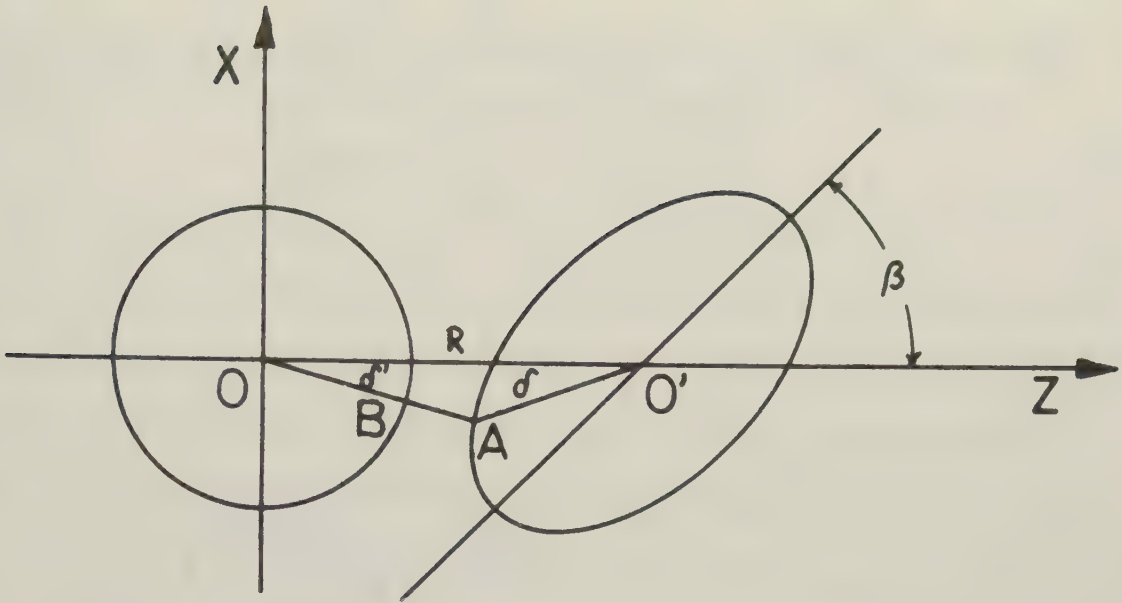


Fig. 3: Zur Bestimmung der Coulombschwelle muß man die genaue Kerngestalt und den Wert des Euler-winkels β kennen. Die Berechnung des kleinsten Abstandes zwischen beiden Kernoberflächen ist evident.

Mit $\phi_{2\mu}(\vartheta, \varphi)$ bezeichnen wir die reellen Kugelfunktionen

$$\begin{aligned}\phi_{2m} &= -\frac{i}{\sqrt{2}} (Y_{2m} - (-1)^m Y_{2-m}) \\ \phi_{20} &= Y_{20} \\ \phi_{2-m} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{2m} + (-1)^m Y_{2-m})\end{aligned}\quad (26)$$

Für $\varphi = 0$ sind die $\phi_{2m>0} = 0$. Der Punkt A hat die Koordinaten

$$A = (x_0, z_0) = (\overline{OA} \sin \delta, R + \overline{OA} \cos \delta) \quad (27)$$

und den Abstand $\overline{OA} = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}$ vom Zentrum, der Winkel δ' ist gegeben durch $\delta' = \arctan(x_0/z_0)$. Analog zu Gl. (25) berechnet man die Entfernung $\overline{OB}$

$$\overline{OB} = R_{O1} \left(1 + \sum_{\mu} (-1)^{\mu} Q_{2-\mu(1)} \phi_{2\mu}(\delta', 0) \right). \quad (28)$$

Die Coulombschwelle hängt natürlich vom Anfangswert des Winkels β ab. Der Targetkern dreht sich während des Stoßprozesses infolge des großen Massenparameters nur wenig. Bei jedem Integrationsschritt werden nun laufend für mehrere günstig

gewählte Winkel δ_j (für $0 \leq \beta \leq \pi/2$ gilt $\pi \leq \delta \leq \pi + \pi/10$) die Entfernungen $\rho_j = (\overline{OA}_j - \overline{OB}_j)$ berechnet. Die kleinste Energie, für die ein $\rho_j \leq 0$ wird, kennzeichnet die Coulombschwelle. Aus ihr kann man leicht den Reaktionsquerschnitt berechnen

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(180^\circ)_R = (r_c/4)^2 \bar{P}. \quad (29)$$

$(r_c/4)^2$ ist der Rutherfordsche Streuquerschnitt, $r_c = 2Z_1Z_2e^2/(mv_\infty^2)$. $\bar{P}$ gibt den Bruchteil aller Orientierungen an, die zu einer Überschneidung der Oberflächen von Projektil und Targetkern führen. $\bar{P}$ ist durch die Anfangsorientierung und die Einschubenergie bestimmt (s. auch Fig. 3):

$$\bar{P} = \frac{2 \int_0^{\beta_i} \sin \beta d\beta}{4\pi} = 1 - \cos \beta_{\text{initial}}. \quad (30)$$

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(180^\circ)_R$ beginnt immer bei $\beta = 0^\circ$ und endet bei $\beta = 90^\circ$.

Durch die statische Deformation des Targetkerns wird die normale Coulombschwelle, definiert durch

$$E_c = Z_1Z_2e^2/(R_{01} + R_{02}), \quad (31)$$

erniedrigt. Die Elongationen der induzierten Vibrationen sind im Bereich des Umkehrpunktes t_n der angenäherten Rutherford-schen Hyperbel noch sehr viel kleiner als die Gleichgewichtsdeformation β_0 (s. Fig. 5 a,b). Reaktionsquerschnitte werden in den Figuren 7 - 12 gezeigt und dort auch diskutiert.

II.4 Rotations-Vibrations-Potential

Wir behandeln zunächst die Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen für das einfachste Potential $V(a_0, a_2)$ aus Gl. (9)

$$V(a_0, a_2) = 1/2 C_0(\beta_0 - a_0)^2 + C_2 a_2^2. \quad (32)$$

Dieses Potential aus dem Rotations-Vibrations-Modell nimmt harmonische a_0 - und a_2 -Schwingungen um die Gleichgewichtslage $a_0 = \beta_0$, $a_2 = 0$ an. Die Konstanten B , C_0 , C_2 und β_0 erhält man aus dem ersten Rotationsniveau E_{rot} , dem ersten $a_0 (= \beta)$ -Vibrationsniveau E_β , dem ersten $a_2 (= \gamma)$ -Vibrationsniveau E_γ

und der Übergangswahrscheinlichkeit von E_{rot} in den Grundzustand

$$\epsilon_0 = \frac{1}{3} E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{J_0}, \quad B = \frac{\hbar^2}{3\epsilon_0 \beta_0^2}, \quad C_0 = \frac{E_\beta^2}{3\epsilon_0 \beta_0^2}, \quad C_2 = \frac{E_\gamma^2}{3\epsilon_0 \beta_0^2}, \quad J_0 = 3B\beta_0^2 \quad (33)$$

mit $E_{\text{rot}} = 0,0447$ MeV, $E_\beta = 0,994$ MeV und $E_\gamma = 1,047$ MeV für ^{238}U . Zur Veranschaulichung des Anregungsvorgangs sind in

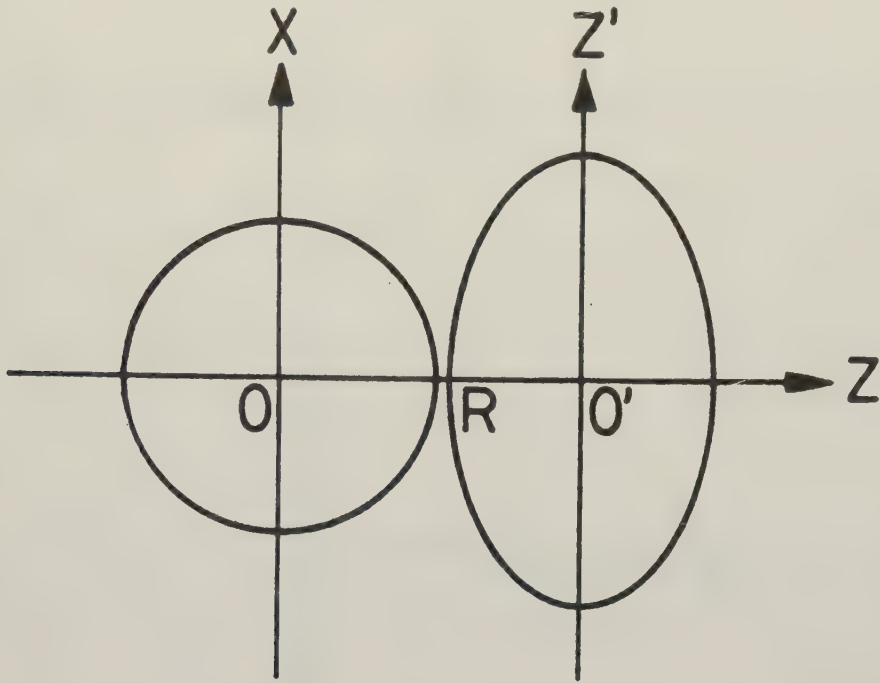


Fig. 4 zeigt die Orientierung der Kerne, die zur Berechnung der Anregungsenergien in Fig. 5 gewählt wurde.

Fig. 5 die Elongationen der a_0 - und a_2 -Schwingungen und die dazugehörigen Anregungsenergien beim Beschuß von ^{238}U mit ^{222}Rn aufgetragen. Als Einschußenergie wurde 790 MeV gewählt, da hier der Einfluß der Kernkraft ungefähr gleich dem Einfluß der Coulombkraft ist. Um die Übersichtlichkeit nicht durch Zentrifugaleffekte zu beeinträchtigen, wurde $\beta = \pi/2$ (s. Fig. 4) gewählt, so daß keine Rotationen angeregt werden können. In Fig. 5a ist die Anregung bei reiner Coulombwechselwirkung dargestellt. Fig. 5b zeigt den Einfluß der Kernkraft. Zunächst wird die a_0 -Schwingung (gestrichelte Linie, Gleichgewicht bei $\beta_0 = 0,28$) durch die Coulombkraft angeregt, dann

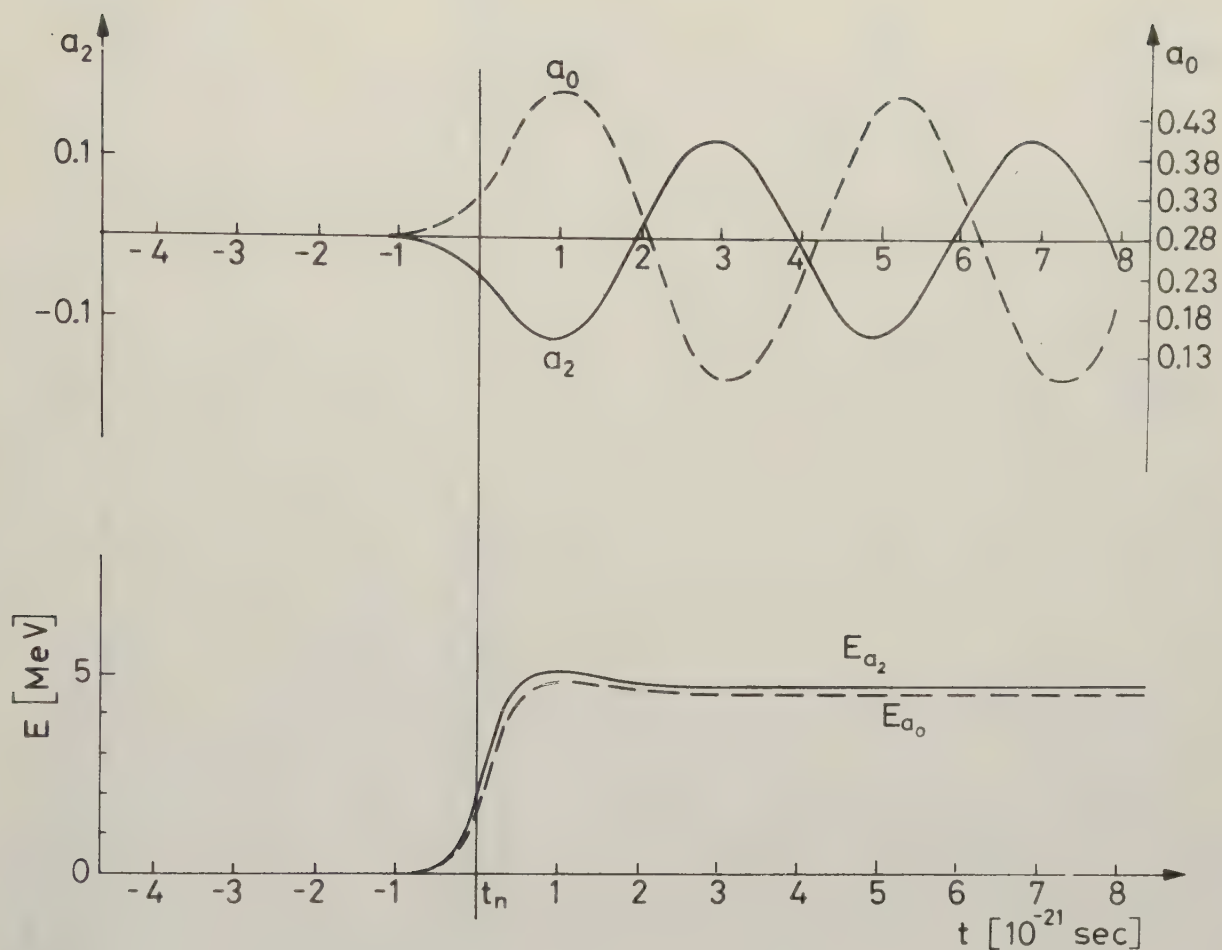


Fig. 5a: Anregung der a_0 - und a_2 -Schwingung von ^{238}U beim Beschuß mit ^{222}Rn bei einer Einschußenergie von 790 MeV bei reiner Coulombwechselwirkung. t_n markiert den kleinsten Abstand der Schwerpunkte von Projektil und Targetkern.

- α) Elongation der a_0 - und a_2 -Schwingung
- β) Anregungsenergie der a_0 - und a_2 -Schwingung

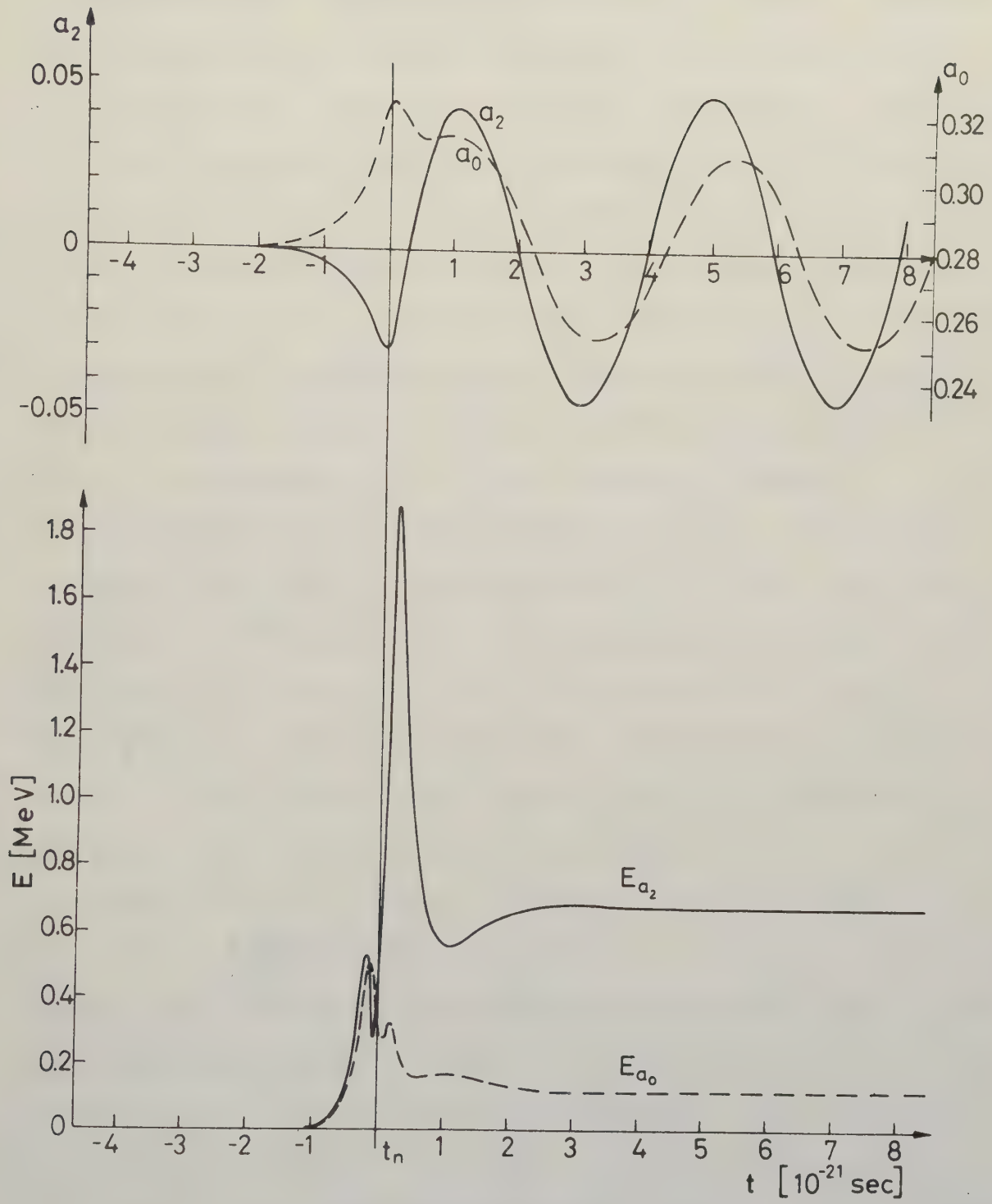


Fig. 5b zeigt den Einfluß der Kernkräfte auf die Coulombanregung.

gebremst durch die Kernkräfte und in entgegengesetzter Richtung beschleunigt. Die Anregungsenergie E_{a_0} sinkt ab und nimmt wieder zu. Wenn die beiden Kerne sich soweit voneinander entfernt haben, daß sie außerhalb der Reichweite der Kernkräfte sind, überwiegt wieder die Coulombkraft. Sie wirkt zunächst bremsend; dann wieder beschleunigend. Die Energie E_{a_0} sinkt abermals ab und nimmt wieder etwas zu. Nachdem noch einmal etwas Anregungsenergie an die Bahnbewegung zurückgegeben wurde, ist E_{a_0} konstant. Die Anregung der a_2 -Schwingung durchläuft die gleichen Phasen, jedoch ist der Einfluß der Yukawa-Kraft, bedingt durch ihren Oberflächencharakter und durch die Geometrie (s. Fig. 4), erheblich stärker.

Das Potential aus Gl. (32) (strichpunktierte Kurve in Fig. 6) schneiden wir bei β_{cr} , entsprechend $E_b = 5,7$ MeV, der Spaltschwelle für ^{238}U , ab. Wir nehmen an, daß Coulombspaltung dann eintritt, wenn $a_0(t)$ größere Werte erreicht als $\beta_{cr} = \beta_0 + \sqrt{2E_b/C_0}$ für Einschußenergien unterhalb der Coulombschwelle. Diese Definition berücksichtigt die Zentrifugalstreckung des Targetkerns. Der Wirkungsquerschnitt für Coulombspaltung ist analog zu Gl. (29) gegeben durch

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(180^\circ)_{cf} = (r_c/4)^2 P, \quad (34)$$

wobei P den Bruchteil der Anfangsorientierungen angibt, die zur Spaltung führen. In unseren Beispielen verwenden wir zunächst $r_0 = 1,2$ fm als Kernradiuskonstante. Als Targetkern betrachten wir immer ^{238}U . Beginnen wir mit ^{40}Ar auf ^{238}U (s. Fig. 7). Die Kernkraftkonstante V_0 hat den Wert -309 MeV fm. Coulombspaltung ist nicht möglich, die Kernladungszahl $Z = 18$ ist zu klein. Der Reaktionsquerschnitt beginnt bei 187 MeV (entsprechend dem Euler-Winkel $\beta = 0^\circ$), steigt dann steil an bis alle Anfangsorientierungen zu einer Überschneidung der beiden

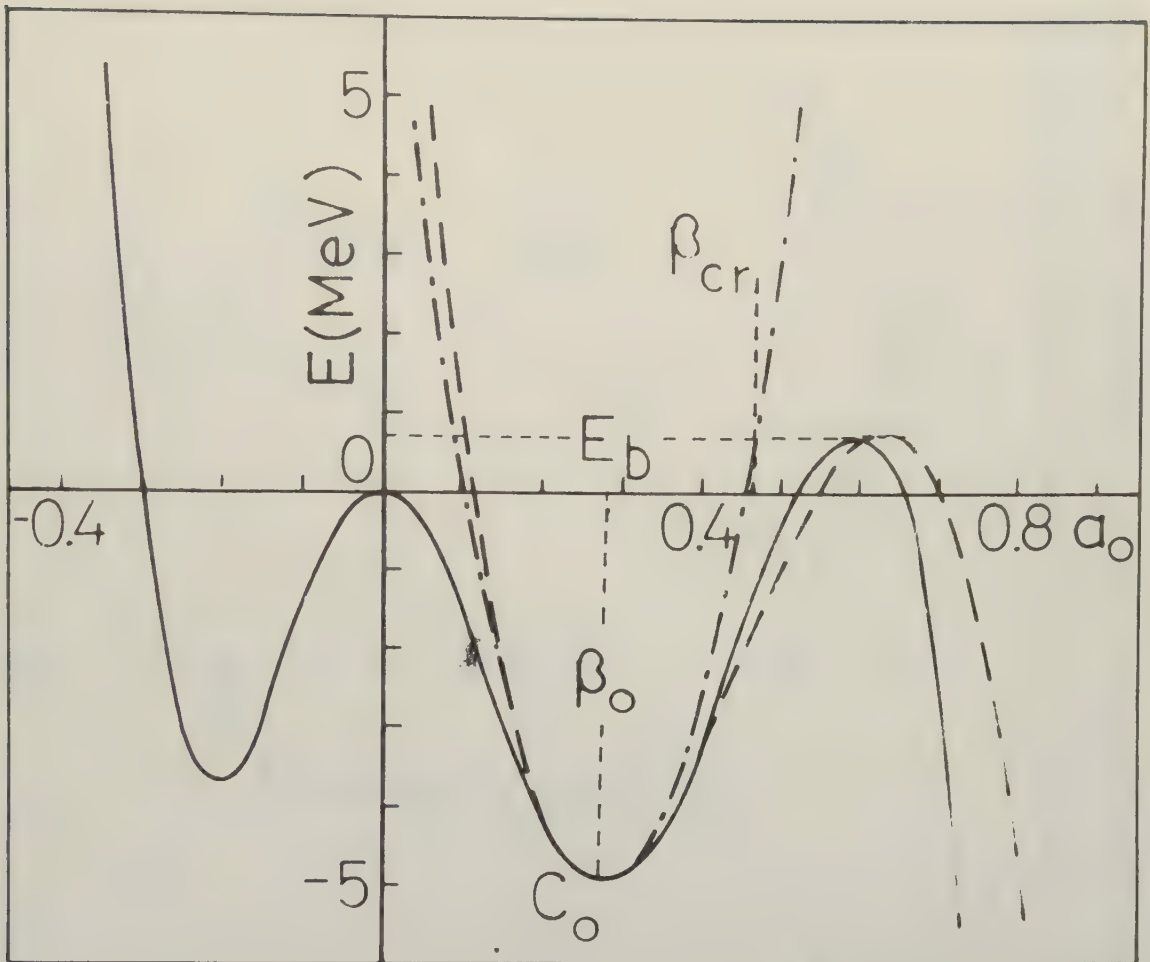


Fig. 6: Vergleich der verwendeten Potentiale der a_0 -Schwingung
a) Rotations-Vibrations-Modell (strichpunktierte Kurve),
b) Potential 3. Ordnung von Wilets et al. (gestrichelte Kurve),
c) Schnitt durch die Potentialenergiefläche $V(a_0, a_2=0)$ für ^{238}U (durchgezogene Kurve).

Kernoberflächen führen und nimmt dann mit steigender Energie wie $(r_c/4)^2$ ab. Analog verhält es sich bei ^{84}Kr auf ^{238}U (s. Fig. 7). Auch hier ist klassisch keine Coulombspaltung möglich. Die strichpunktierte Kurve ist der quantenmechanisch berechnete Spaltquerschnitt (s. Kap. III). Die Coulombschwelle ($V_0 = -301 \text{ MeV fm}$) liegt bei 356 MeV. Die durch die Kernkräfte

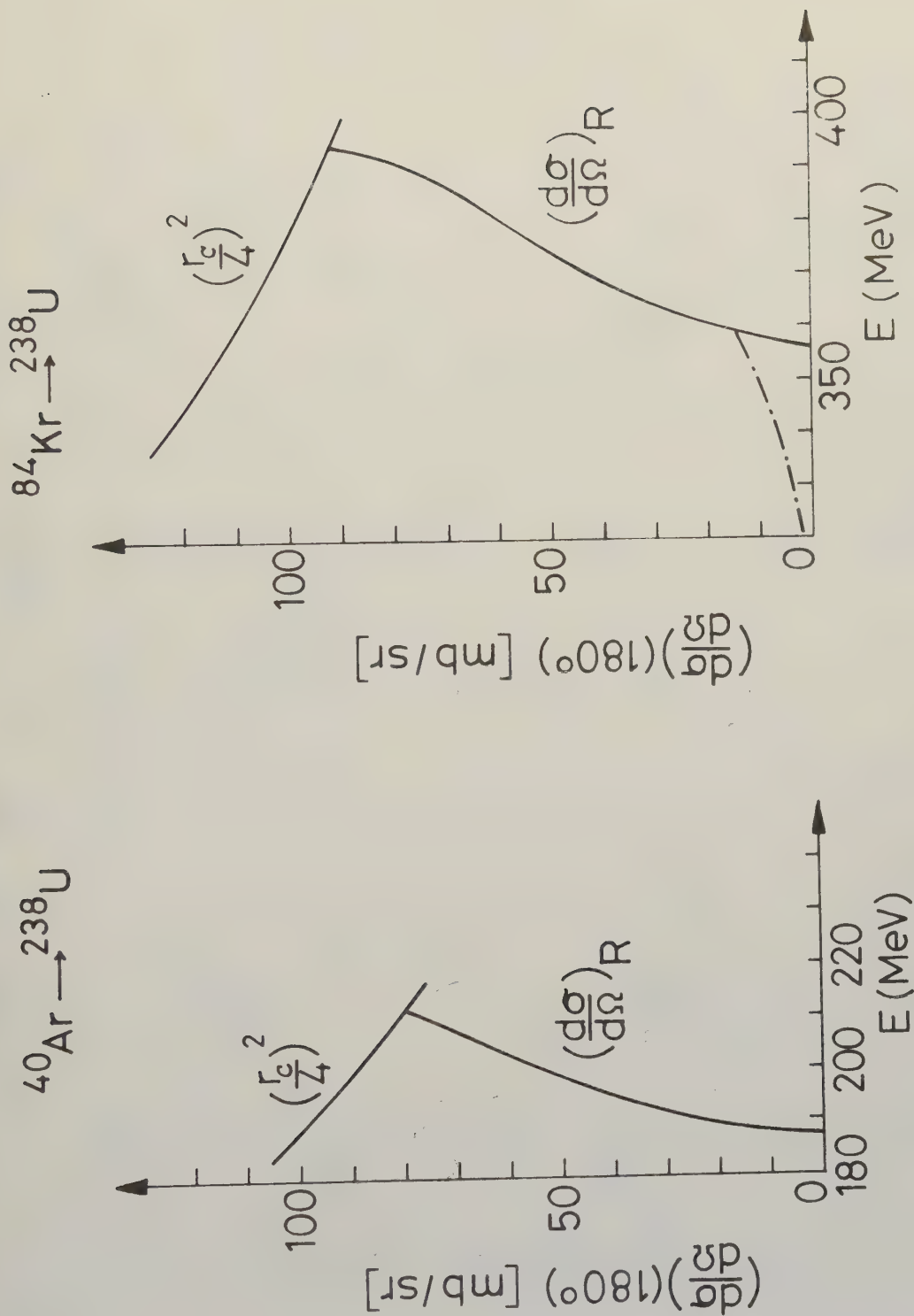


Fig. 7: Reaktionsquerschnitte für ^{40}Ar und ^{84}Kr auf ^{238}U . Die strichpunktierte Linie zeigt den quantenmechanisch berechneten Wirkungsquerschnitt für Coulombspaltung. Als Kernradius wurde $R_0 = 1,2 A^{1/3} \text{ fm}$ verwendet.

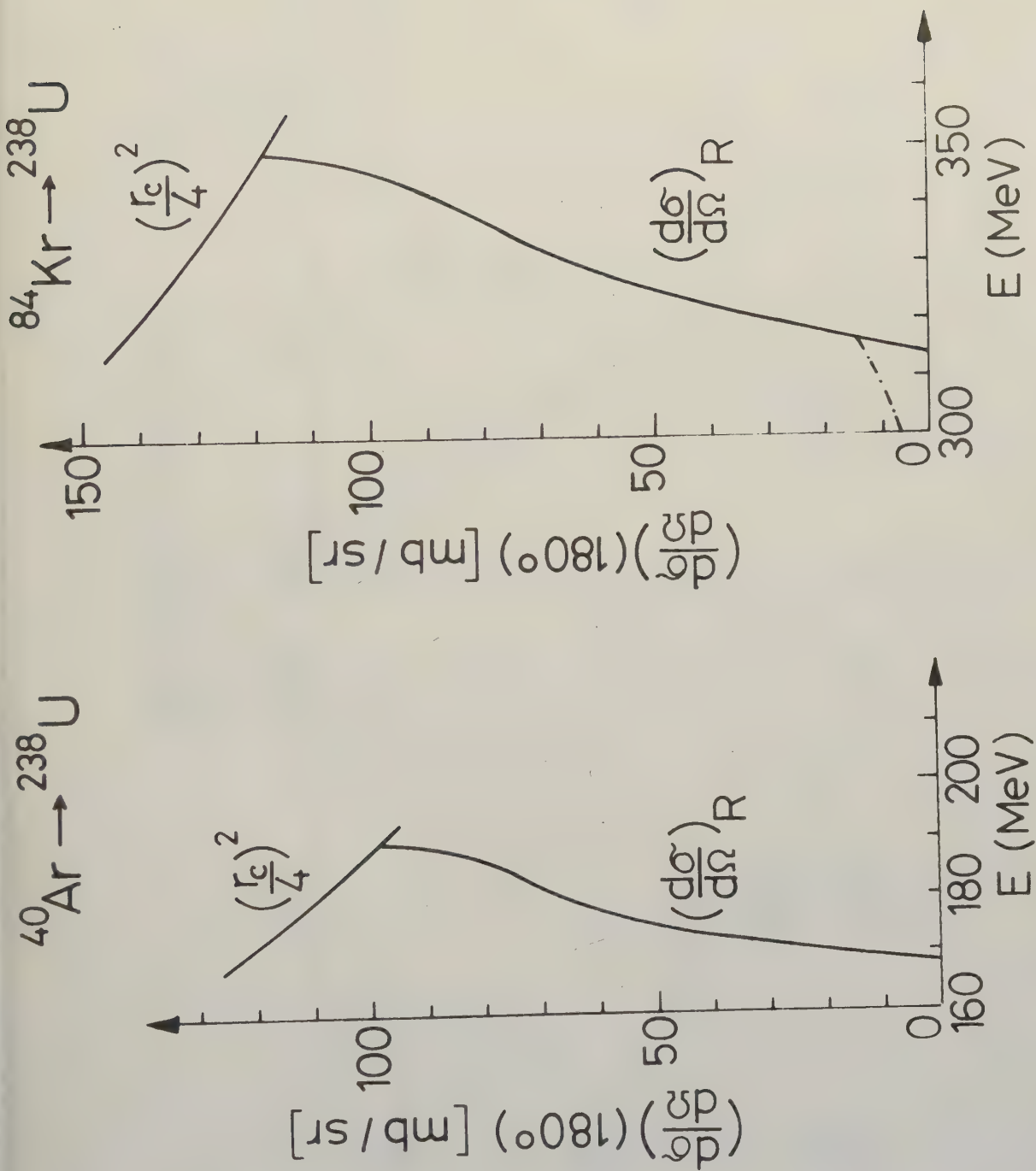


Fig. 8: Reaktions- und Spaltquerschnitt für den größeren Kernradius $R_0 = 1,35 A^{1/3}$ fm für die Rückwärtsstreuung von ^{40}Ar und ^{84}Kr an ^{238}U .

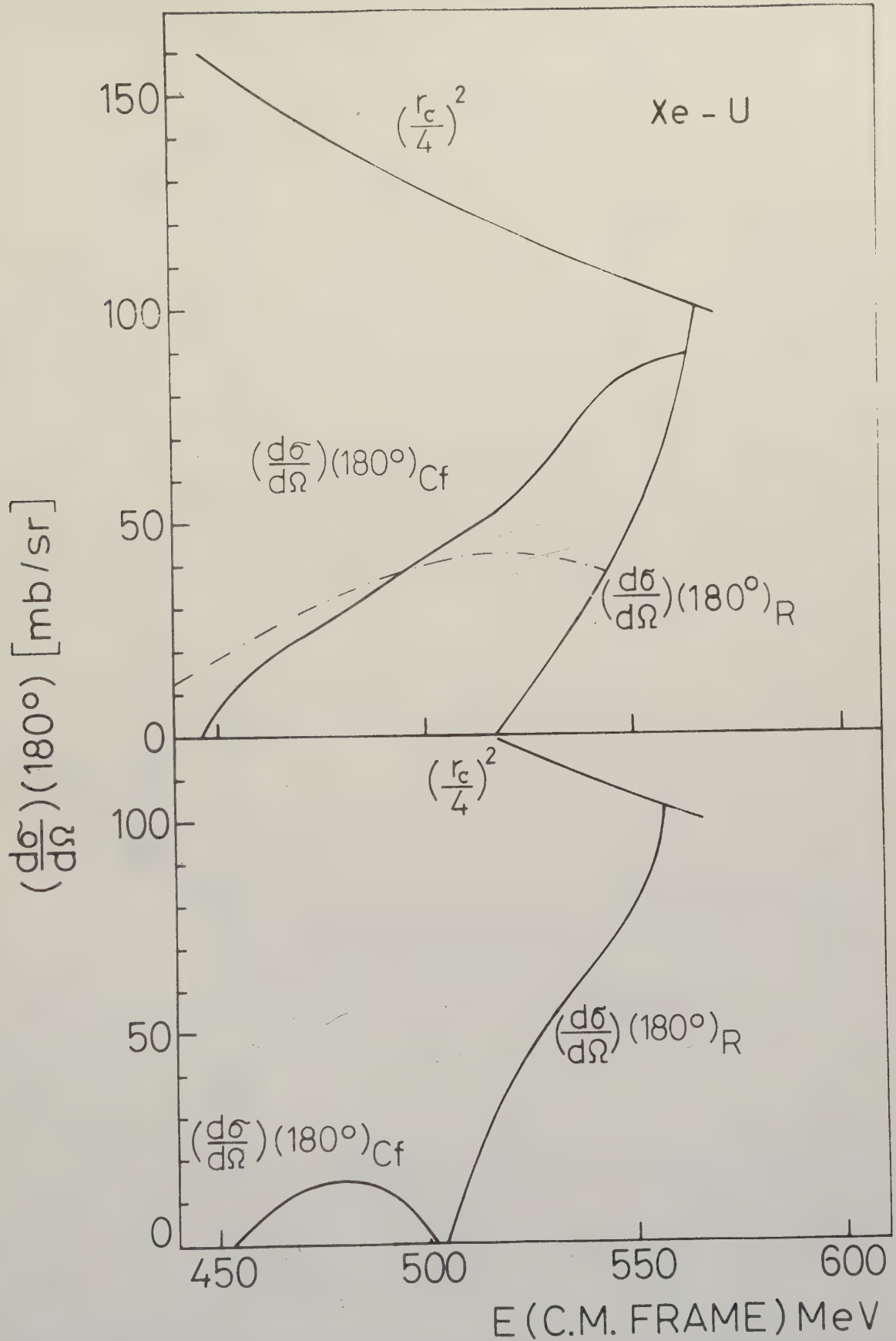


Fig. 9: Spaltquerschnitt $(\frac{d\sigma}{d\Omega})(180^\circ)_{Cf}$ und Reaktionsquerschnitt für ^{132}Xe auf ^{238}U ($r_0 = 1,2 \text{ fm}$). Der obere Teil der Figur wurde ohne, der untere mit Kernkräften gerechnet. Die Kernkräfte wirken der Coulombkraft entgegen, so daß der Spaltquerschnitt ein Maximum erreicht und dann mit steigender Energie abnimmt.

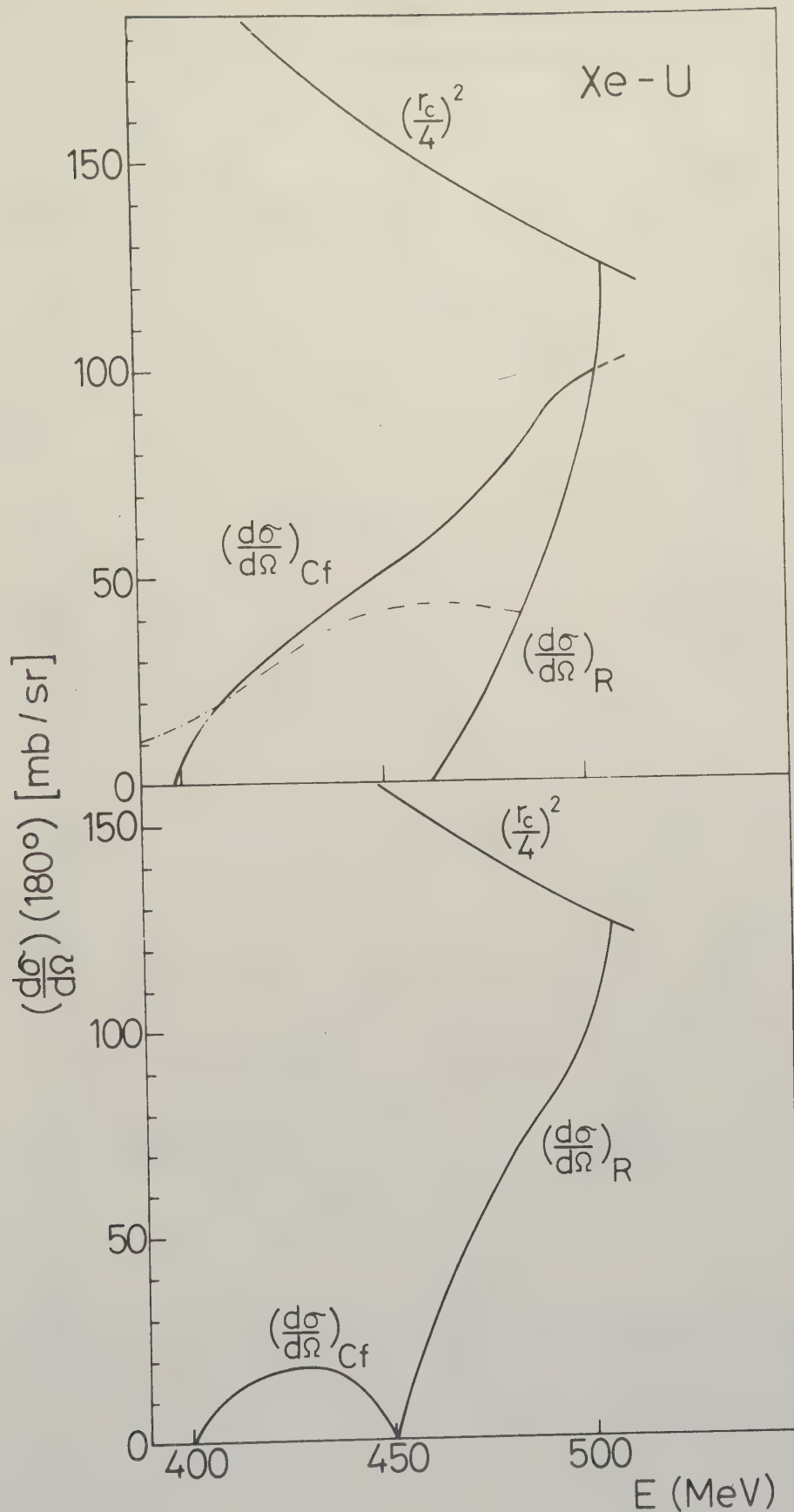


Fig. 10: Spalt- und Reaktionsquerschnitt für ^{132}Xe auf ^{238}U ($r_0 = 1,35$ fm). Der untere Teil der Figur zeigt den Einfluß der Kernkräfte. Durch sie wird der Reaktionsquerschnitt nach niedrigeren Energien hin verschoben.

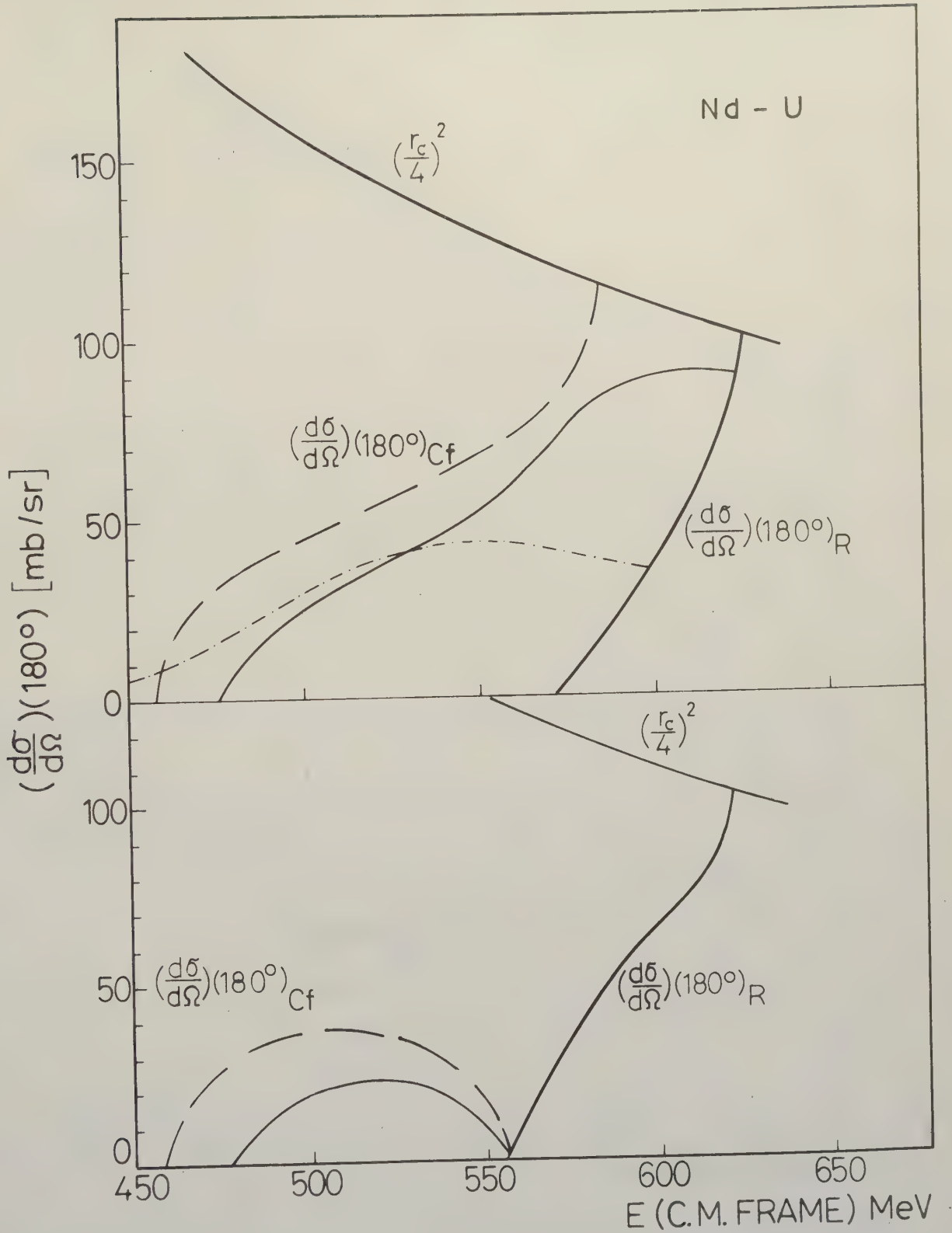


Fig. 11: Spaltquerschnitt $((\frac{d\sigma}{d\Omega})(180^\circ)_{Cf})$ und Reaktionsquerschnitt $((\frac{d\sigma}{d\Omega})(180^\circ)_R)$ für ^{148}Nd auf ^{238}U . Der obere Teil der Figur wurde ohne, der untere Teil mit Kernkraft gerechnet. Durchgezogene Linie: Rotations-Vibrations-Modell (klassisch); gestrichelte Linie: Potentialenergiefläche (klassisch); strichpunktierte Linie: Rot.-Vib.-Modell (quantenmechanisch).

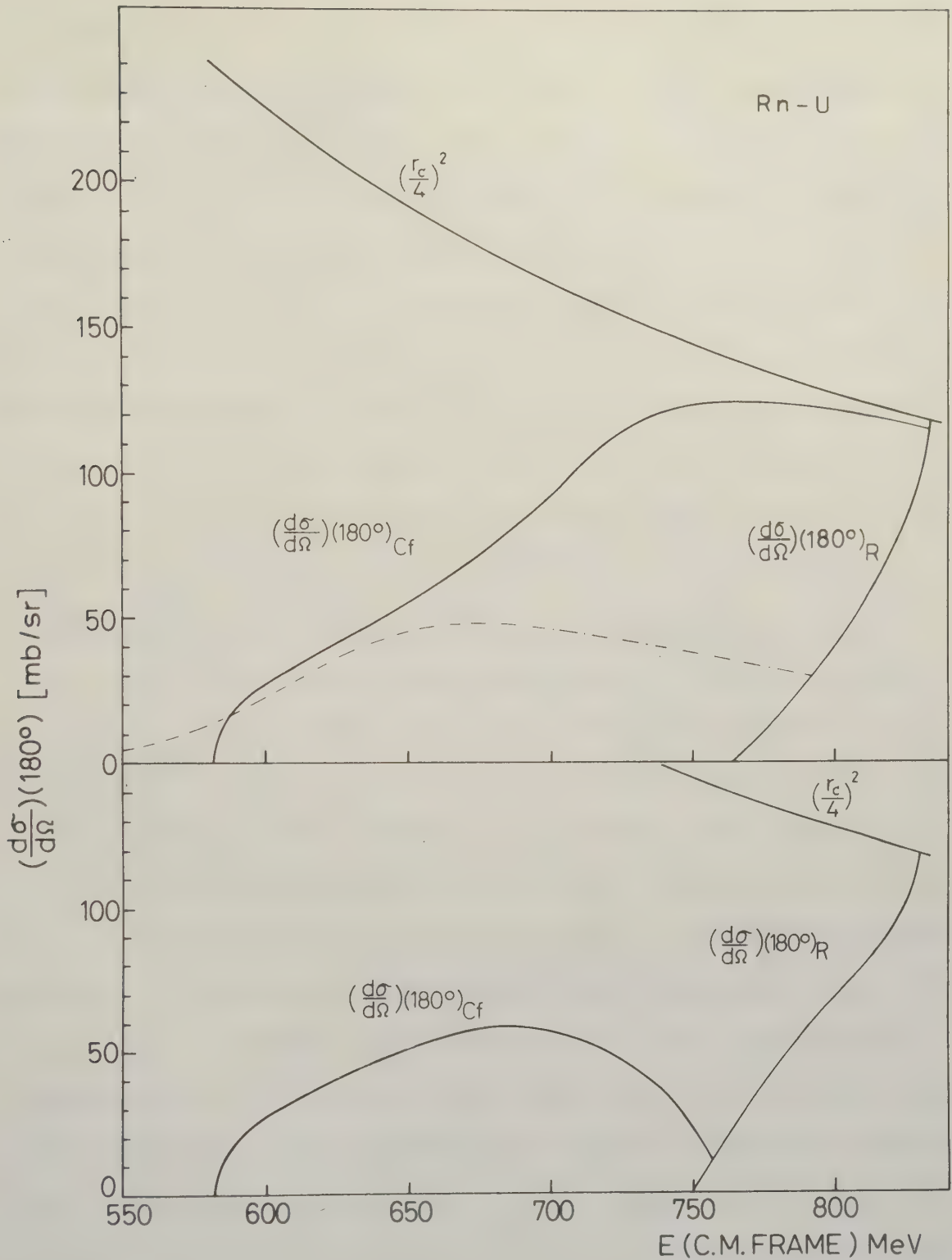


Fig. 12: Spalt- und Reaktionsquerschnitt für die Streuung von ^{222}Rn an ^{238}U . Der untere Teil der Figur zeigt den Einfluß der kernkraft. Die ausgezogenen Kurven wurden klassisch, die strichpunktierte Kurve wurde quantenmechanisch berechnet. Zugrunde liegt das Rotations-Vibrations-Potential.

und die statische Deformation des Targetkerns hervorgerufene Erniedrigung reicht jedoch nicht aus, um die experimentell¹⁸ verwendeten Werte von $r_0 = 1,4 - 1,45$ fm vollständig zu erklären. Um dies zu erreichen, muß man vermutlich höhere Multipolvibrationen in die Rechnung einbeziehen⁴. Auch eine Fermi-Ladungsverteilung verstärkt den Effekt der Yukawa-Kraft. Die experimentellen Werte für die Coulombschwelle werden reproduziert, wenn man $r_0 = 1,55$ fm in unsere Rechnung einsetzt. Dann erniedrigt sich die Coulombschwelle für ^{40}Ar auf ^{238}U ($V_0 = -446$ MeV fm) auf 168 MeV und für ^{84}Kr auf ^{238}U ($V_0 = -439$ MeV fm) auf 314 MeV (s. Fig. 8). In unserem klassischen Modell findet Coulombspaltung erst dann statt, wenn man Xe oder gleichschwere Kerne als Projektile verwendet. Fig. 9 zeigt die Rückwärtsstreuung von ^{132}Xe an ^{238}U als Beispiel ($r_0 = 1,2$ fm). Der obere Teil der Figur wurde ohne, der untere mit Kernkraft gerechnet. Die Gl. (34) für den Spaltquerschnitt stellt eine Vereinfachung dar, da der Rutherford'sche Streuquerschnitt durch die Deformation von Projektil und Targetkern und besonders durch die Kernkräfte abgeändert wird. Jedoch sind dies nur kleine Störungen, so daß die Näherung gerechtfertigt erscheint. Der Spaltquerschnitt beginnt etwa bei 450 MeV und steigt ohne Berücksichtigung der Kernkraft auf 100 mb/sr bei 550 MeV an. Nun wirkt ab 480 MeV die Kernkraft der Coulombkraft so stark entgegen, daß die Anregungsenergie und damit auch $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(180^\circ)_{\text{Cf}}$ mit steigender Einschußenergie nicht mehr zu, sondern abnimmt. Bei noch höherer Energie nehmen die Spaltquerschnitte wieder zu, weil die Yukawa-Kraft die erforderliche Anregungsenergie in die a_0 -Schwingung pumpt (Yukawa-Spaltung). Jedoch liegen die hierzu nötigen Einschußenergien oberhalb der Coulomb-

schwelle. Durch die Kernkräfte wird der Reaktionsquerschnitt nach niedrigeren Energien verschoben, und auch seine Energieabhängigkeit ändert sich ein wenig. In Fig. 10 wird die Rechnung mit $r_0 = 1,35$ fm ($V_0 = -435$ MeV fm) wiederholt. Die ganze Figur verschiebt sich um knapp 50 MeV nach niedrigeren Energien hin. In Fig. 11 ist als weiteres Beispiel die Rückwärtsstreuung von ^{148}Nd an ^{238}U dargestellt. ^{148}Nd zeichnet sich durch "weiche" Quadrupolvibrationen aus. Auch hier ist wieder das deutliche Absinken des Wirkungsquerschnitts nach Erreichen eines Maximums mit steigender Energie unter dem Einfluß der Kernkraft ($V_0 = -294$ MeV fm) zu beobachten. Die gestrichelten Kurven wurden mit Hilfe der kompletten Potentialenergiefläche für ^{238}U errechnet (s. Kap. II.5). In Fig. 12 sehen wir die Rückwärtsstreuung von ^{222}Rn an ^{238}U . Auch mit Kernkraft ($V_0 = -284$ MeV fm) erreicht der Spaltquerschnitt die Größenordnung 50 mb/sr. Auffällig ist, daß ohne Kernkraft $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(180^\circ)_{\text{cf}}$ nicht in die Kurve $(r_c/4)^2$ einmündet. Dies liegt daran, daß für den Euler-Winkel $\beta = \pi/2$ sehr viel Anregungsenergie in die a_2 -Schwingung gepumpt wird (s. Fig. 5), die in diesem Fall nicht an die a_0 -Schwingung gekoppelt ist, da keine Rotationen angeregt werden können. Diesen unphysikalischen Effekt wollen wir im nächsten Abschnitt beseitigen.

II.5 Potentialenergiefläche

Hier sei nun ein allgemeines Potential $V(a_0, a_2)$ (s. Gl. (9)) für ^{238}U konstruiert, das der Forderung nach Rotationsinvarianz genügt und gleichzeitig eine echte Barriere von 5,7 MeV in a_0 -Richtung aufweist. Dies kann z. B. erreicht werden durch die Potentialenergiefläche^{11,19} (s. Fig. 13)

$$V(a_0, a_2) = \sum_{m,n} C_{mn} (a_0^2 + 2a_2^2)^n a_0^m (6a_2^2 - a_0^2)^m \quad (35)$$

mit den Koeffizienten in MeV: $C_{01} = -175,8472$, $C_{10} = -85,72417$,

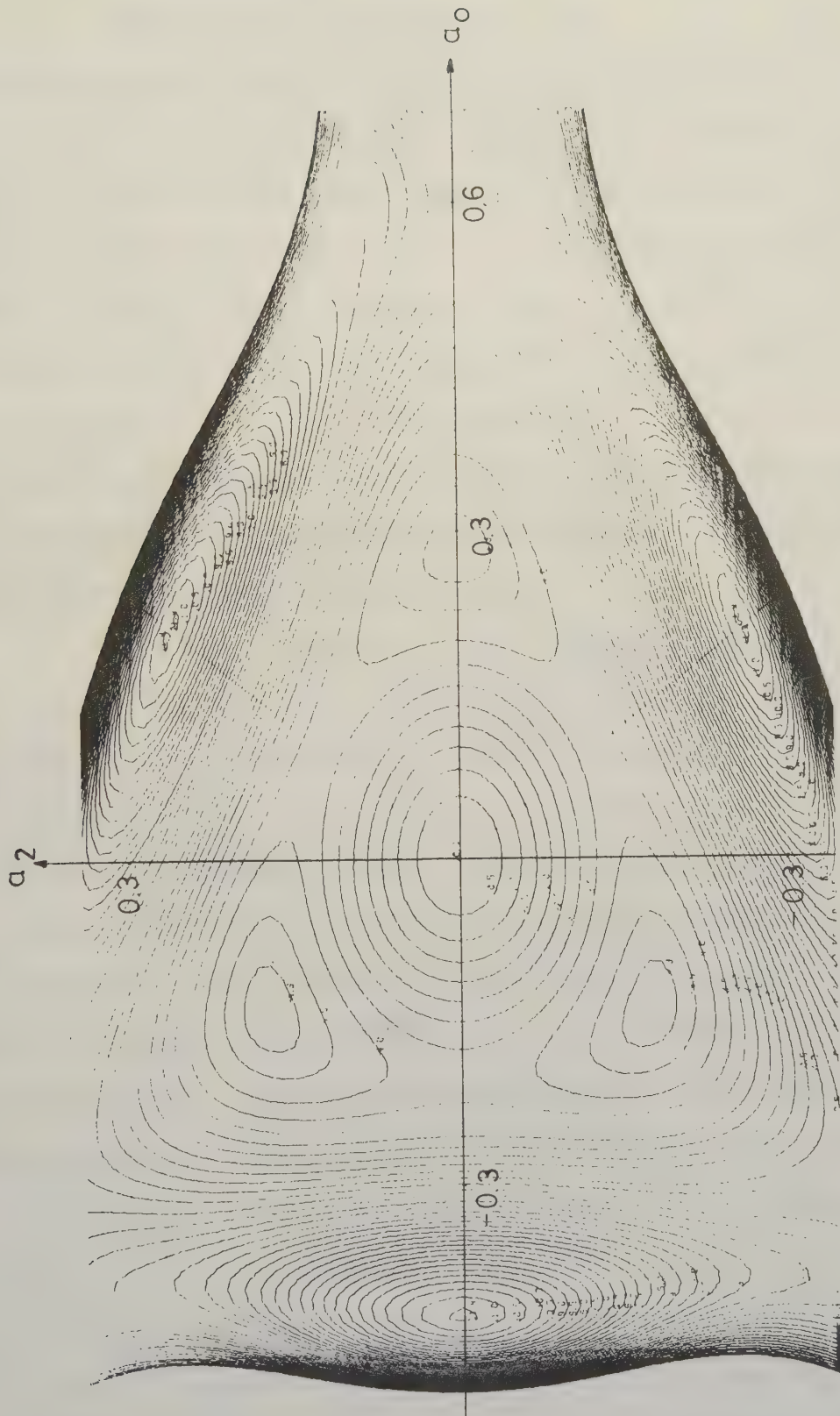


Fig. 13: Anschauliche Darstellung der Potentialenergiefläche für ^{238}U , die den Rechnungen zu Fig. 14 zugrunde liegt.

$C_{02} = 2155,516$, $C_{11} = 3193,989$, $C_{03} = -5210,004$, $C_{20} = 1189,203$,
 $C_{12} = -12290,29$, $C_{04} = 274,6812$, $C_{21} = -7334,116$. Alle höheren
Koeffizienten sind $\equiv 0$. Die Potentialenergiefläche reproduziert
richtig das Minimum bei $\beta_0 = 0,28$, die Krümmung im Minimum C_0
in a_0 -Richtung und damit E_β , die Krümmung C_2 im Minimum in
 a_2 -Richtung und damit E_δ und die Randbedingung $V(a_0, a_2) \rightarrow -\infty$
für a_0 oder $a_2 \rightarrow \infty$. Sie wurde durch Anpassen an vorgegebene
Punkte gefunden. Einen Schnitt der Potentialenergiefläche in
 a_0 -Richtung zeigt die durchgezogene Kurve in Fig. 6. Wir neh-
men an, daß Coulombspaltung dann eintritt, wenn die gesamte
Anregungsenergie des Targetkerns größer ist als das Maximum
(im Bereich $0,5 \leq a_0 \leq 0,7$) von

$$V_{\text{eff}} = V(a_0, a_2 = 0) + \sum_{\nu=1}^3 \frac{L_\nu^2}{2 J_\nu(a_0, a_2 = 0)} \quad (36)$$

Der Spaltweg verläuft natürlich nicht exakt entlang der a_0 -
Achse. Der U-Kern schwingt solange im Potentialenergietal hin
und her, bis er die Stelle gefunden hat, an der die Spalt-
schwelle niedriger als die Anregungsenergie ist. Um die
Rundungsfehler bei der Runge-Kutta-Integration, die hier
durch die hohen Potenzen in der Potentialenergiefläche leicht
das Verfahren instabil werden lassen, klein zu halten, mußte
das Programm auf doppeltgenaue Rechnung umgestellt werden.
Mit Hilfe des Energiesatzes wurde die Genauigkeit bei jedem
Rechenschritt überprüft. Da doppeltgenaue Rechnungen erheblich
mehr Zeit kosten, haben wir uns auf das Beispiel ^{148}Nd auf
 ^{238}U ($r_0 = 1,2$ fm, s. Fig. 11) beschränkt. Die gestrichelten
Kurven, für deren Berechnung auf einer Univac 1108 etwa 11
Stunden Rechenzeit benötigt wurden, zeigen das Ergebnis. Wie
erwartet sind die Wirkungsquerschnitte etwas größer als beim
Rotations-Vibrations-Modell, da sich "weichere" Schwingungen
leichter anregen lassen. Weiter mündet der Spaltquerschnitt

in den Rutherfordschen Streuquerschnitt ein und nimmt dann mit ihm mit steigender Energie ab. Auch die Spaltquerschnitte mit Kernkraft sind etwas größer als im Rotations-Vibrations-Modell. Die Coulombschwelle und damit der Reaktionsquerschnitt werden durch die Potentialenergiefläche praktisch nicht verändert, da in der Nähe von $t = t_n$ die Auslenkungen der a_0 - und der a_2 -Schwingungen noch klein sind (s. Fig. 5), so daß die Abweichungen vom harmonischen Potential nicht ins Gewicht fallen.

Wir wollen nun noch einen Vergleich mit der Arbeit von Wilets, Guth und Tenn⁷ durchführen. Sie setzen $a_2 \equiv 0$ und verwenden für die a_0 -Schwingung das kubische Potential

$$V(a_0) = 3 E_b \left(\frac{a_0(t) - \beta_0}{\Delta\beta} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{a_0(t) - \beta_0}{\Delta\beta} \right) \right). \quad (37)$$

Weiter betrachten sie nur punktförmige Projektile, die sich auf der exakten Rutherfordschen Hyperbel bewegen. Der Parameter $\Delta\beta$, der die Entfernung von der Gleichgewichtsdeformation β_0 zum Sattelpunkt beschreibt, ist nicht so unbestimmt, wie es die Autoren annehmen. Sein Wert wird festgelegt durch die kubische Form des Ansatzes. Aus der Definition von C_0

$$C_0 = \frac{\alpha^2 V(a_0)}{\alpha a_0^2} \Big|_{a_0=\beta_0} \quad (38)$$

folgt mit $C_0 = E_\beta^2 / (\beta_0^2 \cdot E_{rot})$

$$\Delta\beta = \sqrt{\frac{6E_b}{C_0}} = \frac{\beta_0}{E_\beta} \sqrt{6E_b \cdot E_{rot}} \approx 0,35. \quad (39)$$

Für $\Delta\beta = 0,35$ ist das Potential aus Gl. (37) als gestrichelte Linie in Fig. 6 dargestellt. Wilets et al. geben Spaltquerschnitte für $\Delta\beta = 1,5$, $\Delta\beta = 1,0$ und $\Delta\beta = 0,5$ an. Da dadurch die a_0 -Schwingungen als "weicher" angenommen wurden als in dieser Arbeit, sind ihre Spaltquerschnitte größer. So erhalten sie auch den Euler-Winkel $\beta = \pi/2$ (s. Fig. 4) als günstigste Anfangsorientierung für Coulombspaltung. Der U-Kern spaltet

dann beim Anflug des Projektils, indem er entlang seiner z-Achse immer zigarrenförmiger wird. In dieser Arbeit ist dieser Fall gerade der ungünstigste, was besonders beim Rotations-Vibrations-Potential deutlich wird, denn für $\beta = \pi/2$ geht sehr viel Anregungsenergie in die dann ungekoppelte a_2 -Schwingung. Bei Verwendung der Potentialenergiefläche wirkt sich der in dieser Stellung größte Abstand der beiden Kernoberflächen auf die Anregungsenergie aus. Der Kugelausschnitt

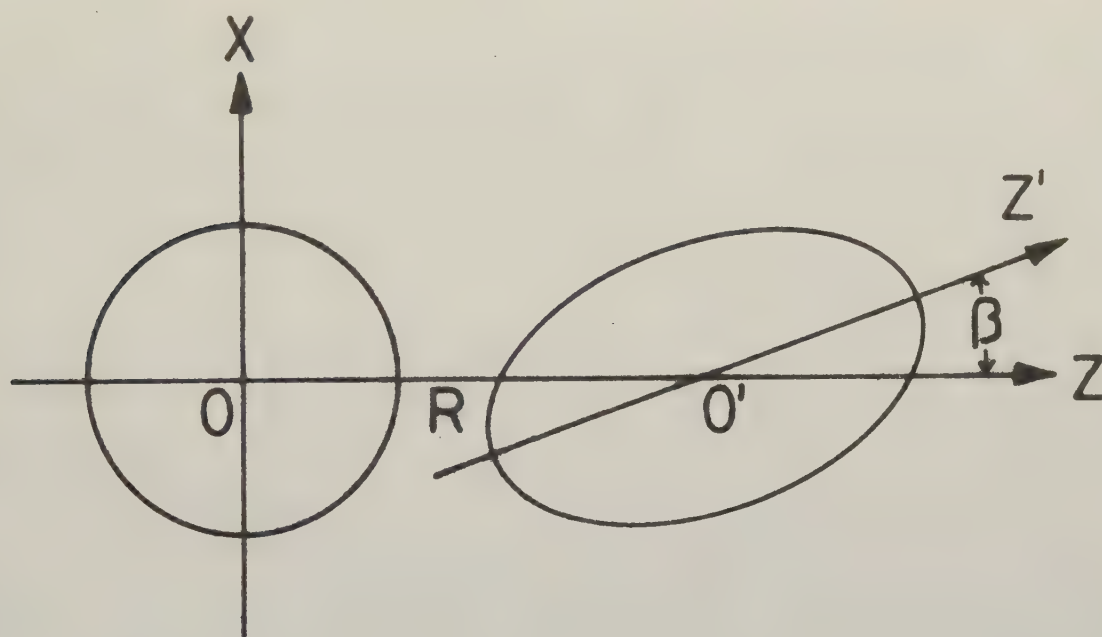


Fig. 14: Günstigste Anfangsorientierung des Targetkerns in bezug auf Coulombspaltung.

der günstigen Orientierungen öffnet sich bei $\beta \approx 20^\circ$ (s. Fig. 14) und erweitert sich dann nach $\beta = 0^\circ$ und nach größeren β -Winkeln hin. $\beta \approx 20^\circ$ stellt offenbar das Optimum dar in bezug auf maximale a_0 -Amplituden bzw. maximale Gesamtanregungsenergien. Zunächst macht die Coulombkraft einen Teil der statischen Deformation rückgängig, beim Zurückschwingen überwindet dann der Kern die Spaltschwelle. Yukawa-Spaltung erfolgt bevorzugt bei Euler-winkeln $\beta \approx 80^\circ$, jedoch nicht bei $\beta = \pi/2$ (harmonisches Potential), da dann wieder die a_0 - a_2 -Kopplung verloren

geht. Bei Verwendung der Potentialenergiefläche ist $\beta = \pi/2$ auch ein günstiger Winkel, da anharmonische a_0 - a_2 -Kopplung vorliegt.

III. Quantenmechanische Theorie der Coulombspaltung

III.1 Einführung in die Theorie der Coulombanregung

Als diese Arbeit begonnen wurde, bestand die Aufgabe zunächst nur darin, zu zeigen, daß die klassische wie die quantenmechanische Theorie der Coulombspaltung annähernd die gleichen Ergebnisse liefern; denn es ist nicht einzusehen, warum die Wirkungsquerschnitte sich um zwei Größenordnungen unterscheiden sollten. Beyer und Winther⁸ weisen zur Begründung ihrer sehr kleinen Wirkungsquerschnitte vor allem darauf hin, daß klassische Modelle grundsätzlich nicht anwendbar seien. Wir wollen hier nur einen kurzen Abriß der semiklassischen Theorie der Coulombanregung geben, Details kann man in dem Buch "Coulomb Excitation" von Alder und Winther²⁰ nachlesen. Die Schrödingergleichung für Coulombanregung lautet

$$i\hbar \dot{\psi} = (H_0 + H_E(t)) \psi . \quad (40)$$

Dabei ist

$$H_0 = H_{\text{Target}} + \frac{p^2}{2m} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{|\vec{r}_p(t)|} . \quad (41)$$

$H_E(t)$ beschreibt die Wechselwirkung des punktförmigen Projektils, das sich auf der exakten Rutherford'schen Hyperbel bewegt, mit dem ausgedehnten Kern

$$H_E(t) = \int d\tau \rho_p(\vec{r}) \left(\frac{Z_1 e}{|\vec{r}_p(t) - \vec{r}|} - \frac{Z_1 e}{|\vec{r}_p(t)|} \right) . \quad (42)$$

Da der Abstand des Projektils vom Zentrum $r_p \gg r$ ist, kann man $|\vec{r}_p - \vec{r}|^{-1}$ nach Legendre-Polynomen entwickeln

$$\frac{1}{|\vec{r}_p - \vec{r}|} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{r_p} \left(\frac{r}{r_p} \right)^{\lambda} P_{\lambda}(\cos \theta) . \quad (43)$$

Damit ergibt sich für $H_E(t)$

$$H_E(t) = \int d\tau \rho_p(\vec{r}) \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{Z_1 e}{r_p} \left(\frac{r}{r_p} \right)^{\lambda} P_{\lambda}(\cos \theta) \quad (44)$$

oder mit dem Additionstheorem der Kugelfunktionen

$$H_E(t) = \int d\tau \rho_p(\vec{r}) \sum_{\lambda=1, \mu}^{\infty} \frac{Z_1 e r^{\lambda}}{r_p^{\lambda+1}} \frac{4\pi}{2\lambda+1} Y_{\lambda\mu}^*(\Omega) Y_{\lambda\mu}(\Omega_p) . \quad (45)$$

Die zeitunabhängigen Größen ziehen wir als Multipolmomente vor das Integral

$$M(E\lambda, \mu) = \int d\tau \rho_p(\vec{r}) r^\lambda Y_{\lambda\mu}(\Omega) \quad (46)$$

Dann ist

$$H_E(t) = 4\pi Z_e \sum_{\lambda, \mu} \frac{1}{2\lambda+1} r_p^{-\lambda-1} Y_{\lambda\mu}(\vartheta_p, \varphi_p) M^*(E\lambda, \mu) \quad (47)$$

Zur Lösung der Schrödingergleichung entwickeln wir Ψ nach Eigenfunktionen des Targetkerns

$$\Psi = \sum_s a_s(t) \Psi_s e^{-\frac{i}{\hbar} E_s t} \quad (48)$$

und erhalten

$$i\hbar \dot{a}_r(t) = \sum_s \langle r | H_E(t) | s \rangle \exp[i(E_r - E_s)t/\hbar] a_s(t) \quad (49)$$

Aus rechentechnischen Gründen werden nun an Stelle von r_p und t die Parameter w und ϵ eingeführt

$$\begin{aligned} t &= (a/v)(\epsilon \sinh w + w) \\ r_p(t) &= a(\epsilon \cosh w + 1) \\ \epsilon &= 1/\sin \vartheta/2, \quad a = r_c/2 = Z_1 Z_2 e^2 / (mv^2). \end{aligned} \quad (50)$$

Setzt man dies in Gl. (49) ein, so erhält man

$$\frac{da_r(w)}{dw} = \frac{4\pi Z_e}{i\hbar v} \sum_{\lambda, \mu, s} \frac{Y_{\lambda\mu}(\vartheta_p, \varphi_p) \exp[i\xi_{rs}(\epsilon \sinh w + w)]}{a^\lambda (\epsilon \cosh w + 1)^\lambda (2\lambda+1)} \langle s | M(E\lambda, \mu) | r \rangle a_s(w) \quad (51)$$

mit dem Adiabasielparameter

$$\xi_{rs} = \frac{a}{\hbar v} (E_r - E_s) \quad (52)$$

Das Gleichungssystem (51) schreibt man meist in der Form

$$\frac{da_r(w)}{dw} = -i \sum_{\lambda, \mu, s} i^{-\lambda} Q_{\lambda\mu}(\xi_{rs}, w) \begin{Bmatrix} \lambda \\ r s \end{Bmatrix} a_s(w), \quad (53)$$

wobei folgende Abkürzungen eingeführt wurden

$$Q_{\lambda\mu}(\xi, w) = \frac{(2\lambda-1)!!}{(2\lambda+1)!!} \left(\frac{\pi}{2\lambda+1} \right)^{1/2} \frac{Y_{\lambda\mu}[\vartheta_p(w), \varphi_p(w)] \exp[i\xi(\epsilon \sinh w + w)]}{(\epsilon \cosh w + 1)^\lambda} \quad (54)$$

und

$$\begin{Bmatrix} \lambda \\ r s \end{Bmatrix} = \frac{(16\pi)^{1/2} (2\lambda-1)!! (2\lambda+1)^{1/2}}{(2\lambda+1)!! a^\lambda} \frac{Z_e}{\hbar v} (-1)^{I_s - M_s} \begin{pmatrix} I_s & \lambda & I_r \\ -M_s & \mu & M_r \end{pmatrix} \langle I_s || i^\lambda M(E\lambda) || I_r \rangle \quad (55)$$

Die reduzierten Matrixelemente sind nach dem Wigner-Eckart-Theorem gegeben durch



$$\langle I_s, M_s | i^\lambda M(\epsilon \lambda, \mu) | I_r, M_r \rangle = (-1)^{I_s - M_s} \begin{pmatrix} I_s & \lambda & I_r \\ -M_s & \mu & M_r \end{pmatrix} \langle I_s || i^\lambda M(\epsilon \lambda) || I_r \rangle. \quad (56)$$

Das Gleichungssystem (53) wird nun numerisch ohne weitere Näherungen mit der gewünschten Genauigkeit gelöst. Für maximal 10 Zustände wurde das Programm von Winther und de Boer in Ref. 20 veröffentlicht. Die Wahrscheinlichkeit für Coulombanregung des N-ten Zustandes mit dem Spin I_N erhält man aus den Amplituden $a_{I_r M_r}$ durch

$$P(N) = \frac{1}{2 I_N + 1} \sum_{M_N} |a_{I_N M_N}(M_N)|^2. \quad (57)$$

Daraus folgt für den Wirkungsquerschnitt für Coulombanregung

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Coul}} = P(N) \frac{\alpha^2}{4} \sin^{-4} \frac{\theta}{2}. \quad (58)$$

III.2 Erweiterung auf Coulombspaltung

Bei Beyer und Winther⁸ werden die a_0 -Vibrationszustände innerhalb des Potentials von Wilets et al.⁷ für $\Delta\beta = 0,25$ durch Diagonalisierung gewonnen. Zwischen den daraus folgenden sechs Zuständen wurden die reduzierten Quadrupolmatrixelemente berechnet und in das Computerprogramm eingesetzt. Beyer und Winther betrachteten keine anderen Freiheitsgrade und nahmen an, daß der Anregungsquerschnitt für das oberste noch gebundene Niveau ungefähr den Spaltquerschnitt wiedergibt. Als Beispiele geben sie Wirkungsquerschnitte für Rückwärtsstreuung am Targetkern ^{234}U an. Als Einschußenergie wählten sie für die verschiedenen Projektile die Coulombschwelle, die sich aus Gl. (31) ergibt. Die errechneten Spaltquerschnitte sind sehr klein, für ^{132}Xe z. B. 0,1 mb/sr. Auch die ähnlichen Rechnungen von Thomas und Riesenfeldt⁶ liefern keine wesentlich größeren Werte. In der erweiterten Arbeit von Beyer, Winther und Smilansky⁹ wird $\Delta\beta$ etwas größer gewählt, so daß es im Potential der Gl. (37) sieben gebundene Zustände gibt. Weiter wer-

den auf jeden dieser Zustände 10 - 14 Rotationszustände aufgesetzt. Dadurch erhöht sich jedoch die Anregungswahrscheinlichkeit des obersten gebundenen Zustandes nur wenig, und somit vergrößert sich nach ihrer Ansicht auch nicht der Spaltquerschnitt. Ein allgemeineres Modell war also nötig.

Ausgehend vom Rotations-Vibrations-Modell, das in Ref. 11 ausführlich diskutiert ist, nehmen wir die a_2 -Schwingungen als Freiheitsgrad hinzu, da sie, wie wir aus dem klassischen Modell wissen, eine bedeutende Rolle in der Coulombanregung spielen. Die kinetische Energie ist wieder gegeben durch

$$T = \sum_v \frac{L_v^2}{2 J_v(a_0, a_2)} + \frac{1}{2} B(\dot{a}_0^2 + 2\dot{a}_2^2). \quad (59)$$

Durch diesen Ansatz ist gleichzeitig eine konsistente Behandlung der Rotationen innerhalb des Modells sichergestellt. Die potentielle Energie wird um die Gleichgewichtslage β_0 entwickelt

$$a_0 = \beta_0 + \xi, \quad a_2 = 0 + \eta \quad (60)$$

und hat deshalb die Form

$$V(\xi, \eta) = 1/2 C_0 \xi^2 + C_2 \eta^2. \quad (61)$$

Damit keine Operatoren im Nenner stehen, entwickeln wir die Trägheitsmomente bis zur zweiten Ordnung nach ξ/β_0 bzw. η/β_0 , daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_1} &= \frac{1}{J_0} \left[1 + \frac{2\eta^2}{\beta_0^2} + 2\sqrt{6} \frac{\eta\xi}{\beta_0^2} - \frac{2\sqrt{6}}{3} \frac{\eta}{\beta_0} - 2 \frac{\xi}{\beta_0} + 3 \frac{\xi^2}{\beta_0^2} \right] \\ \frac{1}{J_2} &= \frac{1}{J_0} \left[1 + \frac{2\eta^2}{\beta_0^2} - 2\sqrt{6} \frac{\eta\xi}{\beta_0^2} + \frac{2\sqrt{6}}{3} \frac{\eta}{\beta_0} - 2 \frac{\xi}{\beta_0} + 3 \frac{\xi^2}{\beta_0^2} \right] \\ \frac{1}{J_3} &= \frac{1}{8 B \eta^2} \end{aligned} \quad (62)$$

Diese Näherung wird für höhere Energien etwas strapaziert, jedoch zeigt Fig. 6, daß sie für Energien nahe der Spaltbarriere noch brauchbar ist. Quantisierung in krummlinigen Koordinaten ergibt den Hamiltonoperator des Targetkerns

$H = H_{\text{rot}} + H_{\text{vib}} + H_{\text{vibrot}}$ mit

$$H_{\text{rot}} = \frac{L^2 - L_3^2}{2J_0} + \frac{L_3^2}{16B\eta^2} \quad (63)$$

$$H_{\text{vib}} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] + \frac{1}{2} C_0 \xi^2 + C_2 \eta^2 - \frac{\hbar^2}{16B\eta^2} \quad (64)$$

$$\text{und } H_{\text{vibrot}} = \frac{L^2 - L_3^2}{2J_0} \left[2 \frac{\eta^2}{\beta_0^2} - 2 \frac{\xi}{\beta_0} + 3 \frac{\xi^2}{\beta_0^2} \right] + \frac{L_+^2 + L_-^2}{4J_0} \left[2\sqrt{6} \frac{\xi\eta}{\beta_0^2} - \frac{2}{3}\sqrt{6} \frac{\eta^2}{\beta_0} \right] \quad (65)$$

$$\text{mit } L_+ = L_1 + iL_2 \quad \text{und } L_- = L_1 - iL_2. \quad (66)$$

Die Schrödingergleichung für $H_{\text{vib}} + H_{\text{rot}}$

$$\left\{ \frac{L^2 - L_3^2}{2J_0} + \frac{L_3^2 - \hbar^2}{16B\eta^2} - \frac{\hbar^2}{2B} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{2} C_0 \xi^2 + C_2 \eta^2 \right\} \Psi = E \Psi \quad (67)$$

kann durch Separation nach den Eigenfunktionen des symmetrischen Kreisels, der ξ - und η -Vibration analytisch gelöst werden. Als Eigenfunktionen des Targetkerns ergeben sich

$$\Psi(\alpha, \beta, \gamma; \xi, \eta) = \left(\frac{2I+1}{16\pi^2(1+\delta_{n_0})} \right)^{1/2} \left(\mathcal{D}_{MK}^I(\alpha, \beta, \gamma) + (-1)^I \mathcal{D}_{M-K}^I(\alpha, \beta, \gamma) \right) \quad (69)$$

$$\cdot \chi_{K, n_2}(\eta) \Psi(\xi) = |IMK n_2 n_0\rangle$$

mit

$$K = 0, 2, 4, \dots$$

$$I = 0, 2, 4, \dots \text{ für } K = 0 \quad (69)$$

$$I = K, K+1, K+2, \dots \text{ für } K \neq 0.$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind (Bezeichnung der Konstanten wie in Gl. (33))

$$E_{IKn_2n_0} = (I(I+1) - K^2) \epsilon_0 / 2 + (1/2 K + 1 + 2n_2) E_\gamma + (n_0 + 1) E_\beta. \quad (70)$$

Der Einfluß von H_{vibrot} auf die Eigenwerte und Eigenfunktionen kann durch Diagonalisierung oder durch Störungsrechnung berücksichtigt werden. Er wird hier, jedoch nicht bei der Definition der Spaltschwelle (s. Gl. (84)), vernachlässigt, um die Bestimmung der E2-Matrixelemente zu vereinfachen. Wir definieren den kollektiven Quadrupoloperator, (andere Multipolübergänge werden nicht betrachtet) für einen Kern mit homogener Ladungsdichte und scharfer Oberfläche durch

$$Q_{2\mu} = \frac{3Z_2 e}{4\pi R_0^3} \int d\tau d\Omega r^4 Y_{2\mu}^* \quad (71)$$

rechnen ihn bis zu Gliedern zweiter Ordnung aus und erhalten

$$Q_{2\mu} = \frac{3Z_2 R_0^2 e}{4\pi} \left\{ \alpha_{2\mu}^* - \frac{10}{\sqrt{14\pi}} \sum_{\nu_1, \nu_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ \nu_1 & \nu_2 & \mu \end{pmatrix} \alpha_{2\nu_1} \alpha_{2\nu_2} \right\}. \quad (72)$$

Mit Hilfe von Gl. (5) transformieren wir $Q_{2\mu}$ ins intrinsische Systems des Kerns, daraus folgt

$$Q_{2\mu} = \frac{3Z_2 R_0^2 e}{4\pi} \left[\mathcal{D}_{\mu 0}^{2*}(\alpha, \beta, \gamma) \beta_0 \left(1 + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_0\right) + \mathcal{D}_{\mu 0}^{2*}(\alpha, \beta, \gamma) \xi \left(1 + \frac{4}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_0\right) + \mathcal{D}_{\mu 0}^{2*}(\alpha, \beta, \gamma) \frac{2}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (\xi^2 - 2\eta^2) + \{ \mathcal{D}_{\mu 2}^{2*}(\alpha, \beta, \gamma) + \mathcal{D}_{\mu -2}^{2*}(\alpha, \beta, \gamma) \} \left\{ \left(1 - \frac{4}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_0\right) \eta - \frac{4}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \xi \eta \right\} \right]. \quad (73)$$

Nun sind die Matrixelemente $\langle I M K n_2 n_0 \| Q_2 \| I' M' K' n_2' n_0' \rangle$ zu berechnen. Mit Hilfe von

$$\langle \chi_{K, n_2}(\eta) | \eta^d | \chi_{K', n_2'}(\eta) \rangle = \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2}K+1+n_2) \Gamma(\frac{1}{2}K'+1+n_2')}{n_2! n_2'!} \right]^{1/2} \cdot \frac{1 + (-1)^{1/2(K'-K)+d}}{\Gamma(\frac{1}{2}K+1) \Gamma(\frac{1}{2}K'+1)} \frac{1}{2\lambda^{1/2d}} \Gamma\left\{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}K'+\frac{1}{2}K+d+2)\right\} \quad (74)$$

$$\cdot \sum_{m=0}^{n_2} \frac{(-n_2)_m \left\{ \frac{1}{2}(\frac{1}{2}K'+\frac{1}{2}K+d+2) \right\}_m}{(\frac{1}{2}K+1)_m m!} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}K'+1) \Gamma(\frac{1}{2}K'+n_2'-\frac{1}{2}K-\frac{\alpha}{2}-m)}{\Gamma(\frac{1}{2}K'+1+n_2') \Gamma(\frac{1}{2}K'-\frac{1}{2}K-\frac{\alpha}{2}-m)} \quad (75)$$

und $(a)_m = a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1)$

erhalten wir

$$\langle \chi_{K, n_2} | \eta | \chi_{K', n_2'} \rangle = \sqrt{(\frac{1}{2}K+n_2+1)/\lambda} \delta_{K+2, K'} \delta_{n_2, n_2'} \quad (76)$$

$$- \sqrt{n_2/\lambda} \delta_{K+2, K'} \delta_{n_2-1, n_2'} + \sqrt{(\frac{1}{2}K+n_2)/\lambda} \delta_{K-2, K'} \delta_{n_2, n_2'} - \sqrt{(n_2+1)/\lambda} \delta_{K-2, K'} \delta_{n_2+1, n_2'}$$

und

$$\langle \chi_{K, n_2} | \eta^2 | \chi_{K', n_2'} \rangle = - \frac{1}{\lambda} \sqrt{(n_2+1)(\frac{1}{2}K+1+n_2)} \delta_{K, K'} \delta_{n_2+1, n_2'} + \frac{1}{\lambda} (\frac{1}{2}K+1+2n_2) \delta_{K, K'} \delta_{n_2, n_2'} \quad (77)$$

$$- \frac{1}{\lambda} \sqrt{n_2(\frac{1}{2}K+n_2)} \delta_{K, K'} \delta_{n_2-1, n_2'} \quad (78)$$

mit

$$\lambda^2 = 4BC_2/\hbar^2.$$

Sehr einfach erhält man

$$\langle n_0 | \xi | n_0' \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2B\omega}} \left\{ \sqrt{n_0} \delta_{n_0-1, n_0'} + \sqrt{n_0+1} \delta_{n_0+1, n_0'} \right\}, \quad (79)$$

$$\langle n_0 | \xi^2 | n_0' \rangle = \frac{\hbar}{2B\omega} \left\{ \sqrt{n_0(n_0-1)} \delta_{n_0-2, n_0'} + (2n_0+1) \delta_{n_0, n_0'} + \sqrt{(n_0+1)(n_0+2)} \delta_{n_0+2, n_0'} \right\} \quad (80)$$

und $\langle I K \| \mathcal{D}_{00}^2 \| I' K' \rangle = \sqrt{2I+1} \sqrt{2I'+1} \begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ K & 0 & -K' \end{pmatrix}, \quad (81)$

$$\langle I K \| \mathcal{D}_{02}^2 + \mathcal{D}_{0-2}^2 \| I' K' \rangle = \frac{\sqrt{2I+1} \sqrt{2I'+1}}{\sqrt{(1+\delta_{K0})(1+\delta_{K'0})}} \left\{ \begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ K & 2 & -K' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ K & -2 & -K' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ K & -2 & K' \end{pmatrix} \right\} \quad (82)$$

mit $\hbar\omega = \sqrt{C_0/B}$. Nach diesen Vorbereitungen können wir nun

die gesuchten Matrixelemente angeben

$$\begin{aligned}
 \langle 1MKn_2n_0 \| Q_2 \| I'M'K'n_2'n_0' \rangle = & \frac{3Z_2R_0^2e}{4\pi} \left\{ \beta_0 \left(1 + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_0 \right) \sqrt{2I+1} \sqrt{2I'+1} \begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ \kappa & 0 & -\kappa' \end{pmatrix} d_{n_0,n_0'} d_{n_2,n_2'} \right. \\
 & + \left(1 + \frac{4}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_0 \right) \sqrt{2I+1} \sqrt{2I'+1} \begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ \kappa & 0 & -\kappa' \end{pmatrix} d_{n_2,n_2'} \sqrt{\frac{\hbar}{2B\omega}} (\sqrt{n_0} d_{n_0-1,n_0'} + \sqrt{n_0+1} d_{n_0+1,n_0'}) \\
 & + \frac{2}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \sqrt{2I+1} \sqrt{2I'+1} \begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ \kappa & 0 & -\kappa' \end{pmatrix} d_{n_2,n_2'} \frac{\hbar}{2B\omega} (\sqrt{n_0(n_0-1)} d_{n_0-2,n_0'} + (2n_0+1) d_{n_0,n_0'} + \sqrt{(n_0+1)(n_0+2)} d_{n_0+2,n_0'}) \\
 & - \frac{4}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \sqrt{2I+1} \sqrt{2I'+1} \begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ \kappa & 0 & -\kappa' \end{pmatrix} d_{n_0,n_0'} \frac{1}{\lambda} (-\sqrt{(n_2+1)(n_2+1+\frac{3}{2}\kappa')} d_{n_2+1,n_2'} \\
 & + (\frac{1}{2}\kappa+1+2n_2) d_{n_2,n_2'} - \sqrt{n_2(\frac{1}{2}\kappa+n_2)} d_{n_2-1,n_2'}) \\
 & + \left(1 - \frac{4}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \beta_0 \right) \left[\begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ \kappa & 2 & -\kappa' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ -\kappa & 2 & -\kappa' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ -\kappa & 2 & \kappa' \end{pmatrix} \right] \frac{\sqrt{2I+1} \sqrt{2I'+1}}{\sqrt{(1+d_{\kappa 0})(1+d_{\kappa' 0})}} \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 & [(\sqrt{\frac{1}{2}\kappa+n_2+1} d_{n_2,n_2'} - \sqrt{n_2} d_{n_2-1,n_2'}) d_{\kappa+2,\kappa'} + (\sqrt{\frac{1}{2}\kappa+n_2} d_{n_2,n_2'} - \sqrt{n_2+1} d_{n_2+1,n_2'}) d_{\kappa-2,\kappa'}] d_{n_0,n_0'} \\
 & - \frac{4}{7} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \frac{\sqrt{2I+1} \sqrt{2I'+1}}{\sqrt{(1+d_{\kappa 0})(1+d_{\kappa' 0})}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2B\omega}} \left[\begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ \kappa & 2 & -\kappa' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ -\kappa & 2 & -\kappa' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 2 & I' \\ -\kappa & 2 & \kappa' \end{pmatrix} \right] \\
 & (\sqrt{n_0} d_{n_0-1,n_0'} + \sqrt{n_0+1} d_{n_0+1,n_0'}) [(\sqrt{\frac{1}{2}\kappa+n_2+1} d_{n_2,n_2'} - \sqrt{n_2} d_{n_2-1,n_2'}) d_{\kappa+2,\kappa'} \\
 & + (\sqrt{\frac{1}{2}\kappa+n_2} d_{n_2,n_2'} - \sqrt{n_2+1} d_{n_2+1,n_2'}) d_{\kappa-2,\kappa'}] \left. \right\}. \quad (83)
 \end{aligned}$$

Als nächstes legen wir fest, welche Zustände wir bei der Berechnung des Spaltquerschnittes berücksichtigen wollen. Unser Wunsch ist es natürlich, möglichst viele Zustände in die Rechnung einzubeziehen. Dem steht entgegen, daß die Rechenzeit in einem vernünftigen Rahmen bleiben muß. Die Kernspeichergröße der Rechenmaschine legt also die Anzahl der berücksichtigten Niveaus fest. Da wir nur Rückwärtsstreuung betrachten und ^{238}U ein gg-Kern ist, können, da $Y_{\lambda,\mu \neq 0} = 0$ für $\vartheta_p = 180^\circ$ in Gl. (54), keine magnetischen Unterzustände $\neq 0$ der höheren Niveaus angeregt werden. Daraus folgt sofort, daß $P(N) \equiv 0$ ist (s. Gl. (57)) für Niveaus mit ungeradem Spin; mathematisch ist dies ersichtlich aus dem $3j$ -Symbol in Gl. (55). Wir vereinfachen und erweitern zunächst das Winther-de Boer-Programm und schreiben es dann auf eindimensionale Matrizen um, in denen nur die Matrixelemente gespeichert werden, die

$\neq 0$ sind. Weiter lassen wir alle Matrixelemente zweiter Ordnung weg, denn der hierdurch bedingte Fehler beträgt maximal 5 %. Zunächst wurden alle Zustände nach Gl. (70) bis 7,63 MeV Anregungsenergie berücksichtigt, also nicht nur die üblichen Banden (Grundbande, erste a_0 - und erste a_2 -Banden). Es stellte sich jedoch heraus, daß die Zustände mit $K \geq 12$ nur sehr wenig angeregt werden. Dafür wurde die Grundbande bis zum 44^+ -, die $K = 2$ und $K = 4$, $n_2 = n_0 = 0$ Banden, die $n_0 = 1$ und $n_0 = 2$, $K = n_2 = 0$ Banden und die $K = 2$, $n_0 = 1$, $n_2 = 0$ Bande bis zum 38^+ -Zustand betrachtet. Dies ergibt insgesamt 520 Zustände mit 6376 von Null verschiedenen Matrixelementen. Die Anregungsenergie des $n_0 = 6$ a_0 -Vibrationszustandes wird nicht wesentlich erhöht. Jedoch tragen nach unserer Auffassung alle Zustände zur Coulombspaltung bei, für deren Energie E_n gilt

$$E_n \geq \text{Max} \left\{ 3E_b \left(\frac{a_0 - \beta_0}{\Delta\beta} \right)^2 \left[1 - \frac{2}{3} \frac{a_0 - \beta_0}{\Delta\beta} \right] + \frac{I(I+1) - \kappa^2}{6} E_{\text{rot}} \frac{\beta_0^2}{a_0^2} \right\} \quad (84)$$

mit $E_b = E_{\text{zero}} + 5,7 \text{ MeV}$, $E_{\text{zero}} = 1/2 E_\beta + E_\gamma$ und $\Delta\beta = \beta_0/E_\beta \sqrt{6 E_b E_{\text{rot}}}$. Diese Bedingung ist zwar sehr einleuchtend, auf Grund ihrer Bedeutung wollen wir sie dennoch näher begründen. Der erste Summand entspricht dem Potential von Wilets et al., berücksichtigt jedoch die Nullpunktsenergie. Der zweite Summand zeigt die Deformationsabhängigkeit der Rotationsenergie. Er korrigiert bei der Berechnung der Spaltschwelle zum Teil die Vernachlässigung der Rotations-Vibrationswechselwirkung im Hamiltonoperator. Wir nehmen wieder an, daß die Spaltschwelle auf der a_0 -Achse liegt. Aus $E_R = L_1^2/(2J_1) + L_2^2/(2J_2) + L_3^2/(2J_3)$ lassen wir das für $a_2 = 0$ divergierende Glied $L_3^2/(2J_3)$ in den folgenden Betrachtungen weg, da diese a_2 -Abhängigkeit bereits im Hamiltonoperator berücksichtigt wurde, und zerlegen

$$\frac{L_1^2}{2J_1} + \frac{L_2^2}{2J_2} = \frac{L_1^2 + L_2^2}{4} \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right) + \frac{L_1^2 - L_2^2}{4} \left(\frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_2} \right). \quad (85)$$

Für $a_2 = 0$ ist der zweite Summand gleich Null, da $J_1 = J_2 = \frac{1}{2} B a_0^2$ ist. Daraus folgt sofort

$$E_R(a_0, a_2 = 0) = \frac{L^2 - L_z^2}{6 B a_0^2} \quad (86)$$

oder

$$E_R(a_0, a_2 = 0) = \frac{(I(I + 1) - K^2) E_{\text{rot}} \beta_0^2}{6 a_0^2}. \quad (87)$$

Der Wirkungsquerschnitt für Coulombsspaltung ergibt sich aus dem Wirkungsquerschnitt für Coulombanregung durch Summation der Einzelbeiträge über die Zustände n , die Gl. (84) erfüllen

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{cf}} = \sum_n \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_n. \quad (88)$$

Für einen solchen Wirkungsquerschnitt bei einer Genauigkeit von 10^{-4} und einem Bedarf von 52700 Speicherplätzen braucht das Programm auf einer Univac 1108 durchschnittlich 25 Minuten. In Gl. (88) wird der Tunneleffekt vernachlässigt, nur die oberhalb der durch Gl. (84) definierten Spaltschwelle liegenden Zustände tragen zur Coulombsspaltung bei. Spaltquerschnitte als Funktion der Einschussenergie sind in den Figuren 7 - 12 als strichpunktierte Linien eingezeichnet. Typisch für die quantenmechanische Rechnung ist der langsame Abfall des Wirkungsquerschnitts nach kleinen Energien hin. So erhalten wir auch bei der Reaktion $^{84}\text{Kr} - ^{238}\text{U}$ einen kleinen Spaltquerschnitt, während in der klassischen Theorie keine Coulombsspaltung möglich ist. Mit steigender Energie nimmt der Spaltquerschnitt zunächst zu, er erreicht jedoch nicht so große Werte wie im klassischen Rotations-Vibrations-Modell. Zum einen ist die quantenmechanische Beschreibung prinzipiell richtiger, zum anderen kann das klassische Modell wesentlich feinere physikalische Effekte berücksichtigen. Es ist nicht

beschränkt auf eine bestimmte Anzahl von Zuständen und kann die Rotations-Vibrations-Kopplung ohne Näherungen behandeln. Nahe der Coulombschwelle nehmen die quantenmechanischen wie die klassischen Spaltquerschnitte mit dem Rutherford'schen Streuquerschnitt ab. Die Anregungswahrscheinlichkeiten nehmen nicht mehr zu, da der Vorteil der höheren Einschußenergie ausgeglichen wird durch die Abnahme der Wechselwirkungszeit. Hier macht sich bemerkbar, daß der Prozeß nicht einer "sudden approximation" genügt. Wie im klassischen Fall nehmen auch die quantenmechanischen Spaltquerschnitte mit steigender Ladungszahl des Projektils langsam zu.

Wir wollen noch zeigen, wie man die quantenmechanische Theorie auf Kernkräfte erweitern kann. Dazu machen wir die Näherung, daß die Bahn des Projektils ausschließlich durch die Coulombkraft bestimmt wird. Wir folgen nicht dem von Leclercq-Willain²¹ für Coulombanregung in Störungsrechnung entwickelten Weg, sondern konstruieren $H_{\text{Nucl}}(t)$ analog zu $H_E(t)$ aus Gl. (42) für ein ausgedehntes, starres, sphärisches Projektil und einen deformierten Targetkern

$$H_{\text{Nucl}}(t) = \frac{V_0}{4\pi} \int_0^{R_{01}} d\tau_1 \rho(\vec{r}_1) \int_0^{R_2(\vartheta_2, \varphi_2)} d\tau_2 \rho(\vec{r}_2) \frac{e^{-|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{r}_p(t)|/\mu}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{r}_p(t)|} \quad (89)$$

$$- \frac{V_0}{4\pi} \int_0^{R_{01}} d\tau_1 \rho(\vec{r}_1) \int_0^{R_{02}} d\tau_2 \rho(\vec{r}_2) \frac{e^{-|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{r}_p(t)|/\mu}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{r}_p(t)|}$$

Daraus folgt (s. auch Gl. (20))

$$H_{\text{Nucl}}(t) = H_{\text{Yukwa int}}^{(1)} = \frac{q}{4\pi} \frac{V_0 A_1 A_2}{R_{01}} \alpha_{2\mu(2)}^* Y_{2\mu}(\vartheta_p, \varphi_p) f(r_p). \quad (90)$$

Der Einfluß des Monopolterms (Gl. (19)) bleibt nach Voraussetzung unberücksichtigt. Vergleichen wir dies mit $H_E(t)$ für $\lambda = 2$ (s. auch Gl. (15))

$$H_E(t) = Z_1 Z_2 e^2 R_{02}^2 \frac{3}{5} \alpha_{2\mu(2)}^* Y_{2\mu}(\vartheta_p, \varphi_p), \quad (91)$$

so sehen wir, daß beide proportional zu $\alpha_{2\mu(2)}^* Y_{2\mu}(\vartheta_p, \varphi_p)$ sind. Deshalb kann man für $H_E(t)$ und $H_{\text{Nucl}}(t)$ die gleichen

Matrixelemente aus Gl. (83) verwenden. Die Unterschiede liegen im Vorzeichen, den verschiedenen Faktoren und der r_p -Abhängigkeit. Gl. (49) lautet nun

$$i\hbar \dot{a}_r(t) = \sum_s \langle r | H_E(t) + H_{Nuc}(t) | s \rangle \exp[i(E_r - E_s)t/\hbar] a_s(t). \quad (92)$$

An Stelle von Gl. (51) erhalten wir damit für $\lambda = 2$ und erste Ordnung in $\alpha_{2\mu}^*$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_r(\omega)}{d\omega} = & \frac{1}{i\hbar\omega} \sum_{\mu,s} a_s(\omega) \exp[i\zeta_{rs}(\epsilon \sinh \omega + \omega)] \cdot a(\epsilon \cosh \omega + 1) \\ & \cdot \langle s | \alpha_{2\mu}^* | r \rangle Y_{2\mu}(\vartheta_p(\omega), \varphi_p(\omega)) \left\{ \frac{3}{5} Z_1 Z_2 e^2 R_{02}^2 \frac{1}{r_p(\omega)^3} \right. \\ & \left. + \frac{q V_0 A_1 A_2}{4\pi R_{01}} f(r_p(\omega)) \right\} \end{aligned} \quad (93)$$

als neue Ausgangsgleichung der numerischen Rechnung. Eine derartige Erweiterung des Winther-de Boer-Programms ist sicher auch in Hinblick auf andere Coulombanregungsprozesse lohnend.

IV. Ausblick

In dieser Arbeit wird die Coulombspaltung quantitativ behandelt. Nachdem der Prozeß von Willets, Guth und Tenn im Jahre 1967 zum ersten Mal untersucht wurde, gingen die Prognosen für den Wirkungsquerschnitt um Größenordnungen auseinander. Für ^{238}U sagen wir Spaltquerschnitte in der Größenordnung 50 mb/sr für Rückwärtsstreuung von Projektilen, die gleichschwer wie oder schwerer sind als ^{132}Xe , voraus. Dies liefert das prinzipiell richtigere quantenmechanische Modell in ungefähre Übereinstimmung mit den hier ebenfalls untersuchten klassischen Rechnungen. Die klassischen Modelle haben den Vorteil, einfacher und anschaulicher zu sein. Deshalb lassen sich hier auch Nebeneffekte, wie z. B. die Anregung des Projektils, berücksichtigen. So konnte auch hierin erstmals der Einfluß der Kernkräfte auf die Coulombspaltung untersucht werden, der zu einem starken Absinken des Spaltquerschnittes führt. Hierdurch wird auch noch ein anderer Aspekt eröffnet: Man kann die Gestalt von Projektil und Targetkern bis ins frühe Stadium der Fusion verfolgen. Die Bestätigung der Ergebnisse des klassischen Modells durch die quantenmechanische Rechnung rechtfertigt die klassische Untersuchung des Einflusses der Kernkräfte. Durch Betrachtung von mehr Zuständen und einer größeren Anzahl von Matrixelementen läßt sich auch das quantenmechanische Modell weiter verbessern. Voraussetzung ist allerdings eine größere und auch schnellere Rechenmaschine. Auch die Anfänge einer Verallgemeinerung des Rotations-Vibrations-Potentials sind gemacht. In der Arbeit von Gneuß¹⁹ werden alle Zustände bis zu einem Spin 6^+ eines beliebigen Potentials, insbesondere der auch hier im klassischen Modell verwendeten Potentialenergiefläche, durch Diagonalisierung berechnet. Wichtiger als eine Erweiterung des

klassischen oder quantenmechanischen Modells auf höhere Multipole oder die Berücksichtigung von Dämpfungseffekten sind experimentelle Spaltquerschnitte. Sie erlauben Rückschlüsse auf die Form der Potentialenergiefläche und sind vermutlich einfacher zu erhalten als Anregungsenergien und Übergangswahrscheinlichkeiten hoch liegender kollektiver Zustände. Die Spaltquerschnitte wurden hier bis zum Schnittpunkt mit dem Reaktionsquerschnitt angegeben, da auch für Energien, die ein wenig oberhalb der Coulombschwelle liegen, Coulombspaltung sicher noch von anderen Reaktionsmechanismen unterschieden werden kann. Die Größe der Wirkungsquerschnitte wird Coulombspaltung zu einem der ersten Experimente mit den im Bau befindlichen Schwerionenbeschleunigern machen.

Literaturverzeichnis

- 1) R. Beringer, Phys. Rev. Lett. 18, 1006 (1967)
- 2) H. Holm, D. Scharnweber, W. Scheid, and W. Greiner, Z. Physik 231, 450 (1970)
- 3) A. S. Jensen and C. Y. Wong, Phys. Rev. C1, 1321 (1970)
- 4) H. Holm and W. Greiner, Phys. Rev. Lett. 24, 404 (1970)
- 5) A. S. Jensen and C. Y. Wong, Phys. Lett. 32B, 507 (1970)
- 6) P. W. Riesenfeldt and T. D. Thomas, Phys. Rev. C2, 711 (1970)
- 7) L. Wilets, E. Guth, and J. S. Tenn, Phys. Rev. 156, 1349 (1967)
- 8) K. Beyer and A. Winther, Phys. Lett. 30B, 296 (1969)
- 9) K. Beyer, A. Winther, and U. Smilansky, Proceedings of the International Conference in Heidelberg, July 15 - 18, 1969, North Holland (1970)
- 10) H. Holm, Diplomarbeit, Frankfurt 1969
- 11) J. M. Eisenberg and W. Greiner, "Nuclear Theory", Vol. I, North Holland Publishing Company, Amsterdam 1970
- 12) C. Y. Wong, Nuclear Data A4, Nr. 3, 271 (1968)
- 13) M. E. Rose, "Elementary Theory of Angular Momentum", J. Wiley and Sons, Inc., New York 1957
- 14) B. C. Carlson and G. S. Rushbrooke, Proc. Cambridge Phil. Soc. 46, 626 (1950)
- 15) W. Scheid and W. Greiner, Z. Physik 226, 364 (1969)
- 16) K. A. Brueckner, J. R. Buchler, S. Jorna, and R. J. Lombard, Phys. Rev. 171, 1188 (1968)
- 17) H. A. Bethe, Phys. Rev. 167, 879 (1968)
- 18) M. Lefort, Orsay, private Mitteilung
- 19) G. Gneuß, Doktorarbeit, Frankfurt 1970
- 20) K. Alder and A. Winther, "Coulomb Excitation", Academic Press, New York and London 1966
- 21) Ch. Leclercq-Willain, Université Libre de Bruxelles, Institut Interuniversitaire des Sciences Nucléaires, preprint

Meinem verehrten Lehrer,

Herrn Prof. Dr. W. Greiner, bin ich zu großem Dank verpflichtet für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine stete Anteilnahme bei ihrer Ausführung.

Weiter möchte ich dem Physics Department der Indiana University in Bloomington/Indiana für seine Einladung zu einem zweimonatigen Gastaufenthalt und für die Gastfreundlichkeit, die mir dort zuteil wurde, meinen herzlichen Dank aussprechen.

Auch meinen Kollegen und ganz besonders Herrn Priv. Doz. Dr. W. Scheid möchte ich für die zahlreichen weiterführenden Diskussionen danken.

Lebenslauf

Am 27. Oktober 1945 wurde ich in Bad Homburg v. d. H. als Sohn des Landgerichtsdirektors Eggert Holm und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Schaefer geboren. Dort besuchte ich ab Ostern 1952 die Volksschule und ab Ostern 1956 die Kaiserin-Friedrich-Schule. Nach dem Abitur im März 1965 begann ich im Sommersemester 1965 mit dem Studium der Physik an der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität in Frankfurt a. M.. Im April 1967 bestand ich dort die Diplomvorprüfung. Im Institut für theoretische Physik fertigte ich unter der Leitung von Prof. Dr. W. Greiner meine Diplomarbeit an und bestand im Mai 1969 die Diplomprüfung. Seit Januar 1970 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für theoretische Physik der Universität Frankfurt a. M. tätig.

